

**PROPUESTA DE MALLADOR ADAPTATIVO EN 2D PARA EL MODELADO DE
PERFILES EN FLUJOS INCOMPRESIBLES**

David Lozano Trejo*, Fernando Velásquez Villegas**, Antonio Zepeda Sánchez***

Centro de Diseño Manufactura e Innovación Tecnológica, Facultad de Ingeniería, UNAM.

* davidlt6@yahoo.com.mx, ** fernvel2@gmail.com, *** antonioz@servidor.unam.mx

RESUMEN

Este trabajo muestra una aplicación de la Triangulación de Delaunay en la discretización de un dominio en 2D, durante el análisis de un problema típico de flujo incompresible. El problema de flujo incompresible alrededor de perfiles es significativo en el diseño de formas adecuadas para reducir la fuerza de arrastre y generar la fuerza de sustentación que permita un mejor desempeño del modelo. A pesar de la sencillez del algoritmo, los resultados muestran un tiempo de procesamiento adecuado para este tipo de discretización. Las geometrías de los sólidos se modelan con curvas paramétricas llamadas B-Splines. El alcance de este trabajo se limita a la aplicación del diseño de elementos sólidos sin ningún tipo de discontinuidad en su geometría como sería un hueco interno, no obstante, el concepto puede aplicarse a cualquier clase de elemento incluso con este tipo de discontinuidad. Tres casos de estudio son presentados para demostrar la utilidad del mallador adaptativo.

ABSTRACT

This paper shows an adaptive mesh algorithm based on Delaunay's Triangulation used in the discretization in 2D, of design domains in incompressible flow analysis. This kind of problems around geometries is very significant in shape design according to reduce drag forces and generate lift forces that allow suitable performance of models. Nevertheless the proposed algorithm is very simple, it shows appropriate processing time for this kind of discretization. Solid shapes modeling is based on parametric curves to call B-Splines. The scope of this paper is limited to solid models design without any discontinuity type in its geometry like it would be an internal hole, nevertheless, the concept can be applied to any kinds of included element with this discontinuity type. Three study cases are presented in order to show the performance of the adaptive mesh.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, los problemas de flujo incompresible alrededor de perfiles se resuelven por medio de métodos numéricos. En los últimos años la mayor parte de los desarrollos de métodos de solución se han concentrado en el empleo de los métodos: Diferencias Finitas (FDM), Volúmenes Finitos (FVM), Elementos Frontera (BEM), y Elementos Finitos (FEM) [6]. Una de las ventajas principales de utilizar el método de elementos finitos, es su capacidad para manejar geometrías complejas y permitir refinamiento local de la malla en regiones del modelo que lo necesiten; en particular, en los lugares en donde existan radios de curvatura pequeños. Ejemplos de este tipo de problemas son: flujo alrededor de automóviles, trenes, aviones, y en general cualquier medio de transporte, pero además en el caso de estructuras sometidas a fuerzas de viento, edificios, torres de enfriamiento, tanques etc. Todos estos problemas de ingeniería se resuelven realizando una simulación por computadora, la cual consiste en una aproximación a una prueba de un túnel de viento o agua con un perfil a escala, todo ello con sus respectivas condiciones de frontera [7].

Para lograr una buena aproximación a la solución durante una simulación que involucre mecánica de fluidos (CFD, Computacional Fluid Dynamics), el punto fundamental es obtener una discretización de las geometrías, tal que las representen eficaz y fielmente. En general el refinamiento de la malla en zonas específicas ayuda a esta tarea. Lo más común en estos casos es el uso de elementos finitos triangulares,

aunque también pueden ser cuadrangulares, hexagonales, etc. Sin embargo, el uso de elementos de mayor complejidad implica elevar la complejidad del modelado y mallado de la geometría.

TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY

Dado un conjunto de puntos $\{P_i\}$, se define el *polígono de Voronoi* V_j como:

$$V_j = \{p: \|p - P_j\| \leq \|p - P_i\|, \forall i \neq j\}$$

en otras palabras, V_j es la región del espacio cuyos puntos están más cerca de P_j , que de cualquier otro punto del conjunto. El conjunto de todos los polígonos de Voronoi es también conocido como *diagrama de Dirichlet*. De la definición resulta claro que un lado del polígono de Voronoi debe estar a igual distancia de dos puntos del conjunto $\{P_i\}$, siendo un segmento de la recta bisectriz de dichos puntos. Si se unen todos los pares de puntos cuyas bisectrices tienen algún segmento que es frontera de un polígono de Voronoi, el resultado es una triangulación del convexo que contiene a todos los puntos ^[9].

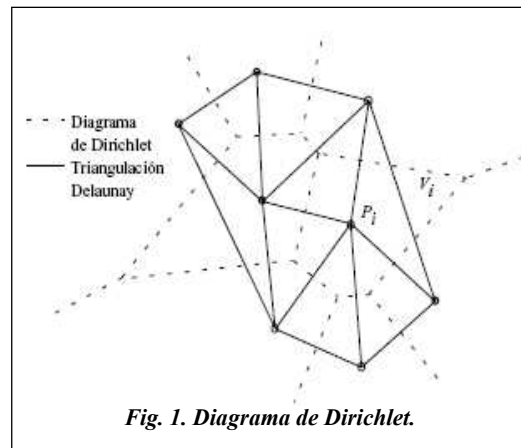


Fig. 1. Diagrama de Dirichlet.

Esta triangulación, figura dual del diagrama de Dirichlet, es conocida como la *Triangulación Delaunay* del conjunto de puntos $\{P_i\}$. En la figura 1 se muestra un conjunto de puntos en el plano, junto con su diagrama de Dirichlet y triangulación Delaunay asociados.

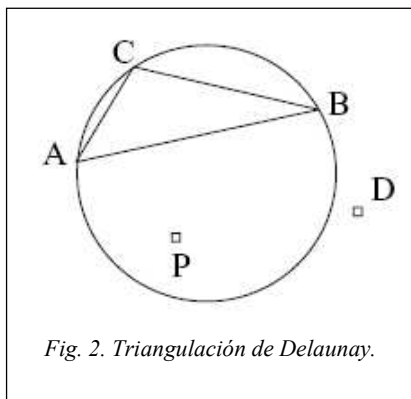


Fig. 2. Triangulación de Delaunay.

La Triangulación Delaunay de un conjunto de puntos como aquella en la cual ningún punto cae en el círculo circunscrito a cualquier triángulo (Entiéndase por círculo circunscrito a aquél delimitado por la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo), tal y como se muestra en la figura 2. En efecto, en el caso genérico, a cada vértice C del diagrama de Dirichlet concurren tres lados, por lo tanto, tres polígonos de Voronoi. Los vértices del diagrama de Dirichlet son, por lo tanto, los centros de los círculos circunscritos a cada triángulo Delaunay asociado; ningún otro punto Q puede caer dentro del círculo circunscrito, ya que en ese caso, el punto C pertenecería al polígono de Voronoi correspondiente a Q , y no sería vértice del diagrama de Dirichlet. La triangulación Delaunay es óptima en el sentido de producir la triangulación con mayor ángulo mínimo.

MALLADO

Se le denomina mallado a la discretización (división) del volumen de cálculo (dominio) en pequeños volúmenes geométricos (subdominios). Mallar es un procedimiento complejo, en el que se deben valorar numerosos aspectos como son (sensibilidad de malla, calidad, geometría, etc.). La validez de una malla depende de numerosos parámetros: calidad, relación de tamaños, ángulos, disposición de elementos, refinamientos locales, etc. Las mallas se generan mediante programas, denominados malladores, que transforman nuestra geometría de partida en una "retícula" de nodos en el plano o el espacio, en los que se

resuelven las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos. El mallado condiciona los resultados obtenidos, por lo que se requiere de una malla aceptable como paso previo a cualquier simulación ^[4].

GENERACIÓN DEL MALLADO ADAPTATIVO

Para discretizar el dominio se necesita crear una nube de puntos mediante un algoritmo de generación de los mismos, el que deberá cumplir un par de condiciones básicas: describir en forma adecuada la geometría y permitir una variación suave de la densidad de puntos en distintas zonas del dominio computacional. Partiendo de la segmentación de la geometría (perfil), la cual para nuestro caso de aplicación es generada mediante una de las técnicas de parametrización de curvas llamada B-Splines. Esta parametrización permite modelar curvas (por medio de segmentos) de una manera más suave, solo elevando el grado de los segmentos que integran la curva, aproximándose así a una geometría real, sin generar esquinas o picos durante el modelado.

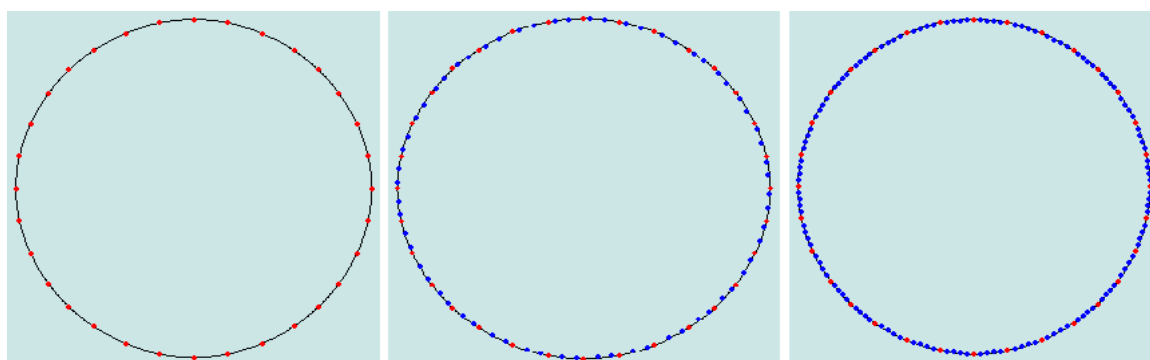
Cada punto inicial (A) y final (B) de un segmento de curva de la B-Spline que modela el perfil, es unido mediante una recta, para nuestro análisis de grado 3, como se muestra en la figura 3.



Fig 3. Segmento de B-Spline unido por una recta AB.

El número de puntos que unen a cada uno de los segmentos de recta se denominan puntos de control, estos se pueden observar en la figura 4 (puntos en rojo). Los puntos de control son tantos como se aproximen a la geometría real, es decir no hay un número mínimo o máximo de puntos definidos para determinar una geometría, entre más puntos de control existan mejor será la aproximación a la geometría real.

El segmento de recta generado puede ser subdividido en un número de pequeños segmentos, tantos como se requiera, con lo cual se logra obtener un refinado de manera implícita, aceptable cercano a las zonas de interés, es decir en donde existan cambios bruscos en la geometría. Con esto se logra distinguir entre 5 tipos de mallado, donde con el primero será del tipo grueso (cero subdivisiones por segmento de recta generado) y el quinto será el fino (con 5 subdivisiones por segmento de recta dado), como se observa en la figura 4 (puntos en azul).



a) Mallado 1 (0 Subdivisiones)

b) Mallado 3 (2 Subdivisiones)

c) Mallado 5 (4 subdivisiones)

Fig. 4. Subdivisiones por tipo de mallado.

Para generar la nube de puntos alrededor del perfil, se localizan las coordenadas del punto medio de cada uno de los segmentos de recta generados, que definen a la geometría:

$$PM_{AB} = (A(x,y)+B(x,y)) / 2 \quad \dots (1)$$

Posteriormente este punto medio se multiplica por un factor r , donde $r > 1$ debido a que es factor de ampliación, para que el punto sea escalado una cierta distancia (aproximadamente la distancia del segmento de recta) para con ello generar triángulos equiláteros y con ello generar un mallado homogéneo:

$$NuevoPM = PM_{AB} * r \quad \dots (2)$$

donde: NuevoPM = Nuevo punto medio.
 PM_{AB} = Punto medio del segmento AB.
 r = Factor de escala arbitrario.

Al obtener el nuevo punto medio (NuevoPM) se realiza el mismo procedimiento. Ahora el segmento AB, serán las coordenadas de inicio y de final de cada segmento del punto medio (NuevoPM). Esto se realiza de manera iterativa a través de una rutina de programación, implementada con el paquete MATHEMATICA 5.2. Con esto se obtiene una nube de puntos, que refleja una expansión puntual, lo cual se observará como un “refinamiento” de malla en zonas cercanas al perfil modelado, lo cual nos dará una mejor aproximación en la solución final. En la figura 5, se muestra esta expansión o “refinamiento”.

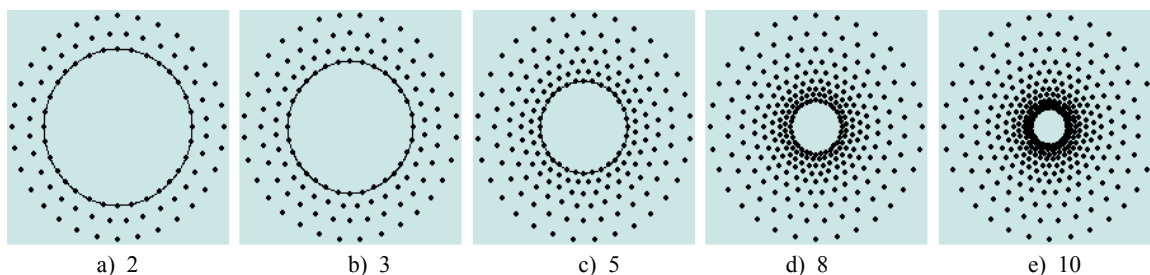


Fig. 5. Iteraciones para la generación de la nube de puntos.

En la figura 6 se muestra la nube de puntos para un primer tipo de mallado, la cual esta delimitada por el dominio computacional, es decir por las cordeadas del túnel de viento o de agua.

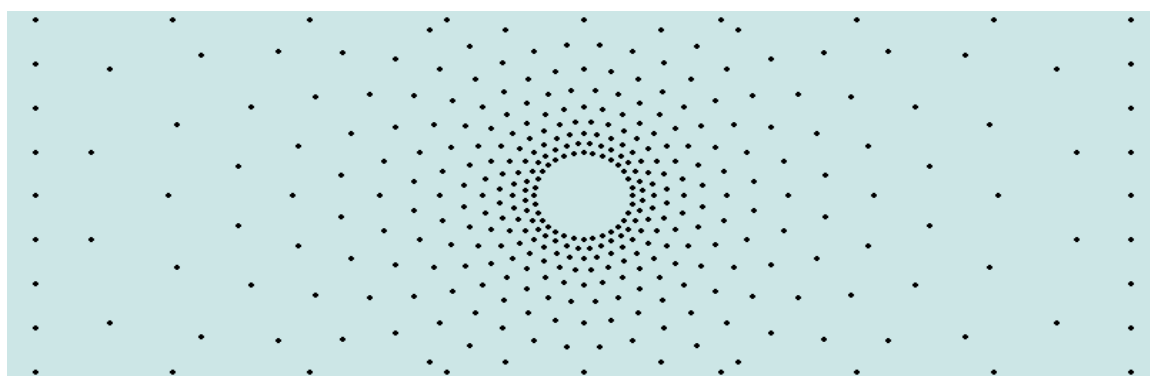


Fig. 6. Nube de puntos generada por el algoritmo descrito, para el tipo de mallado 1, restringido por las dimensiones del túnel de viento.

Cuando se aplica la triangulación de Delaunay a la nube de puntos (triangulación generada a través de una función contenida en el paquete MATHEMATICA 5.2, propia para este propósito), esta presenta

triángulos al interior de la estructura, y si estamos modelando el flujo al exterior del perfil, estos no sirven. Por ello para eliminarlos se realiza un algoritmo, el cual provoca el suprimir estos triángulos no deseados. Para esto, se aplica la triangulación de Delaunay a la nube de puntos y se calculan las coordenadas del centroide de cada uno de los triángulos generados por esta, aprovechando que el baricentro es igual al centroide en cualquier triángulo, como se muestra en la figura 7.

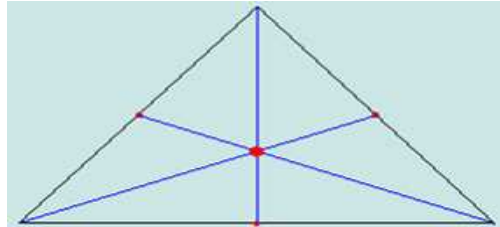
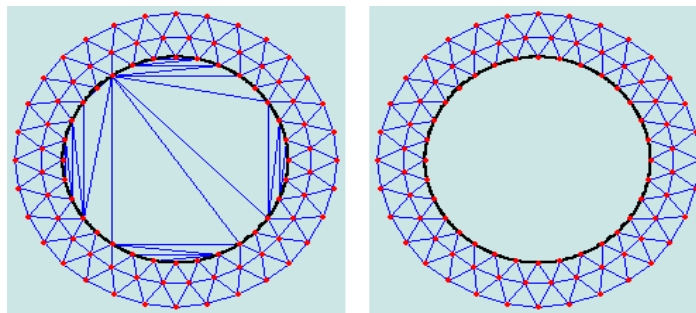


Fig. 7. Cálculo del centroide o baricentro de uno los triángulos (elementos).

Conociendo el centroide se realiza una comparación, para poder eliminarlos:

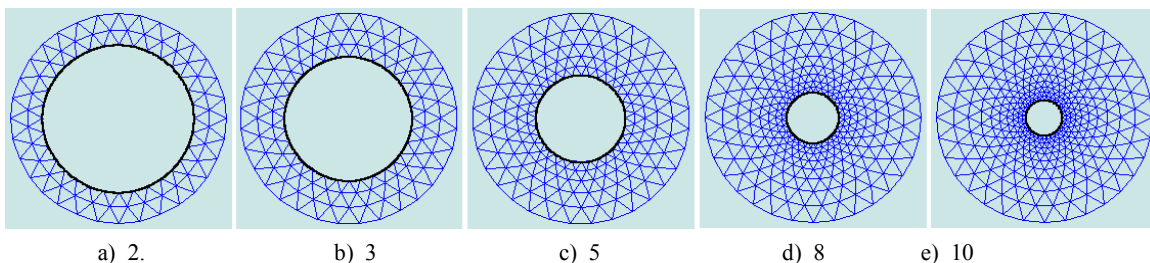
$$\text{centroide}_{(x,y)} < \text{perfil}_{(x,y)} \dots (3)$$

Si las coordenadas del centroide está al interior del perfil, este es eliminado, y si no es así, el triángulo se mantiene, lo que se muestra en la figura 8.



a) Antes b) Después
Fig. 8 Eliminación de triángulos internos durante la Triangulación de Delaunay

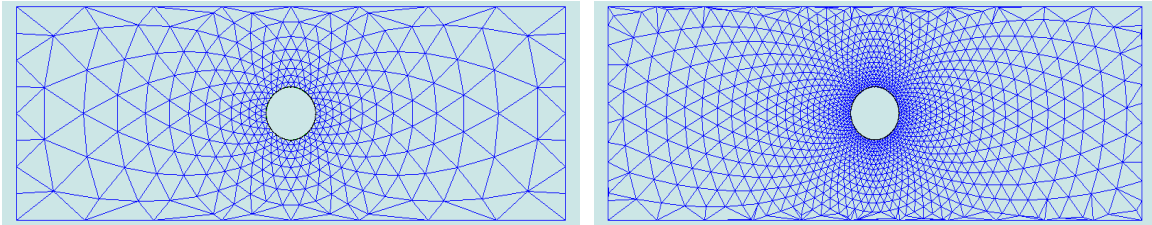
En la figura 9, se muestra la aplicación del algoritmo descrito para borrar los triángulos internos al perfil, debidos a la triangulación de Delaunay, a la generación iterativa de la nube de puntos de la figura 5.



a) 2. b) 3 c) 5 d) 8 e) 10
Fig. 9. Aplicación del algoritmo a la generación de la nube de puntos.

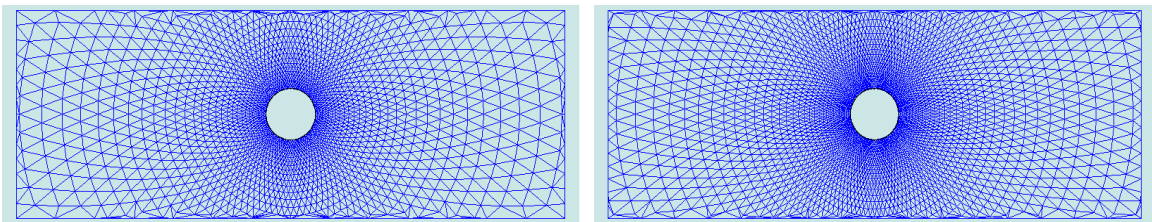
APLICACIÓN

En la figura 10 se muestran las mallas correspondientes a cada uno de los 5 tipos que puede generar el algoritmo, en este caso la geometría utilizada es un círculo. Para cada una de las mallas se presentan los datos más significativos como son número de nodos, elementos y tiempo de ejecución.



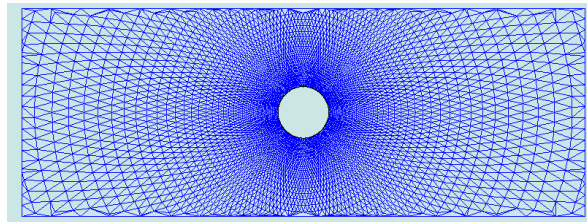
a) Mallado 1: 386 nodos, 722 elementos.
Tiempo: 4.016 segundos.

b) Mallado 2: 1355 nodos, 2642 elementos.
Tiempo: 20.328 segundos.



c) Mallado 3: 2210 nodos, 4334 elementos.
Tiempo: 39.734 segundos.

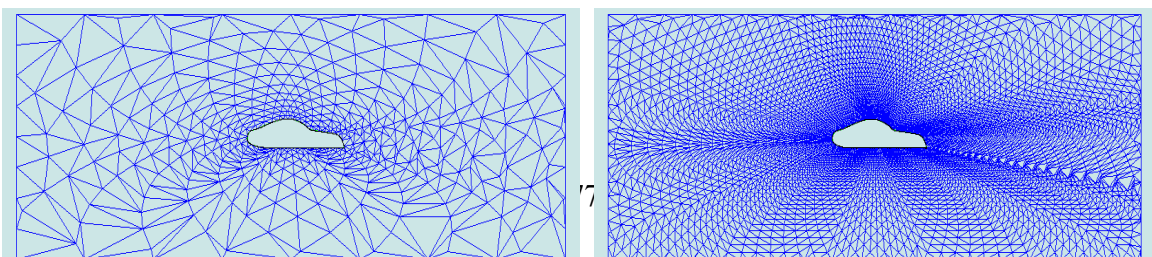
d) Mallado 4: 3264 nodos, 6429 elementos.
Tiempo: 67.125 segundos.



e) Mallado 5: 4589 nodos, 9061 elementos.
Tiempo: 108.241 segundos

Fig. 10. Mallas generadas para un círculo.

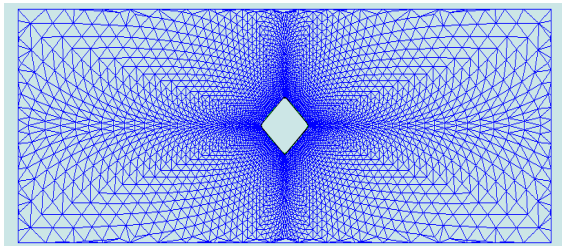
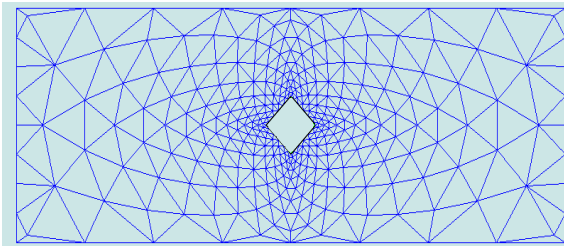
En la Fig. 11, se muestran otros casos de aplicación; las mallas correspondientes a tres geometrías: un auto, un rombo y un hexágono. Para cada uno de ellos se presentan dos mallas, una de ellas gruesa y la otra fina.



Mallado 1: 506 nodos, 962 elementos.
Tiempo: 5.906 segundos.

Mallado 5: 3968 nodos, 7736 elementos.
Tiempo: 110.145 segundos.

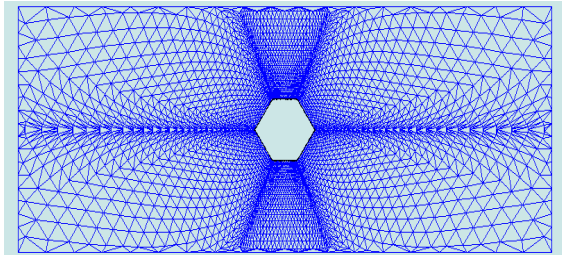
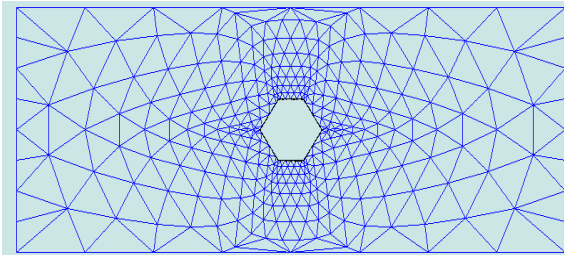
a) Carrocería de un automóvil



Mallado 1: 330 nodos, 610 elementos.
Tiempo: 3.36 segundos.

Mallado 5: 3835 nodos, 7554 elementos.
Tiempo: 93.937 segundos.

b) Un Rombo



Mallado 1: 344 nodos, 638 elementos.
Tiempo: 3.672 segundos.

Mallado 5: 4025 nodos, 7939 elementos.
Tiempo: 91.531 segundos.

c) Un Hexágono

Fig. 11. Tres ejemplos de aplicación, mallado: grueso (1) y fino (5).

Como se puede apreciar, en todos los casos el algoritmo fue capaz de adaptar la malla de forma que cada una de las geometrías es modelada con elevada precisión, aun cuando la geometría tuviera ciertas zonas con ciertos cambios bruscos en la misma.

Además podemos observar que el tipo de mallado obtenido por el algoritmo es un mallado denominado estructurado u homogéneo ya que trata de crear triángulos con un sesgo muy corto y con ello aproximarse a los triángulos equiláteros; ya que si esto no sucediera y el sesgo fuera demasiado grande como en los triángulos rectángulos, habría problemas en la solución, en particular problemas de convergencia en la misma, y es por eso que se intenta reducir al máximo la generación de sesgos grandes durante la triangulación.

En el caso de las mallas gruesas el tiempo de procesamiento necesario fue apenas de 5.906 segundos para el perfil del automóvil, mientras que en mallas finas el tiempo se incrementó a 110.145 segundos. Aunque el tiempo se eleva bastante, en sentido práctico no es excesivo ni limitante durante el análisis por elementos finitos.

Los tiempos de ejecución de cada malla tienen que ver además del algoritmo, con la función propia del programa MATEHEMATICA 5.2 necesaria para generar la triangulación de Delaunay, además de que pueden ser mejorados, debido a las características de la computadora con la que se realizaron las pruebas: Procesador AMD Sempron 1.80 Ghz., 512 MB RAM.

CONCLUSIONES

El trabajo aquí presentado, muestra una propuesta de algoritmo de un mallador adaptativo de dominios con geometría compleja. Dicho mallador tiene aplicación en el análisis por elementos finitos de problemas flujo incompresible alrededor de geometrías complejas, y forma parte de un proyecto de optimización de forma mediante la aplicación de Elementos finitos como herramienta principal de cálculo.

Los resultados mostrados por el algoritmo demuestran un alto desempeño del mismo, así como su capacidad para adaptarse a diferentes niveles de fineza en la malla, lo cual dependerá directamente de la necesidad de la aproximación de la solución durante el análisis por elementos finitos. Además, demostró manejar eficientemente regiones del dominio con aristas de radio de curvatura pequeño, lo cual es complicado.

Este tipo de mallado puede ser utilizado para obtener la solución de las ecuaciones de la mecánica de fluidos para un perfil inmerso en un flujo incompresible, ya que provee un mallado homogéneo para geometrías complejas sólidas y con ello poder tener una mejor buena aproximación o simulación del flujo alrededor de perfiles y ahorrar tiempo, en lugar de una prueba de laboratorio con todo lo que conlleva.

REFERENCIAS

- [1] GRESHO, P. M., *"Incompressible Flow and the Finite Element Method, Vol. 2: Laminar Flow"*, 2ª ed., Ed. John Wiley & Sons Ltd., England 1999, pp 447-937.
- [2] HAFEZ, M. M., *"Numerical Simulations of Incompressible Flows"*, 1ª ed., Ed. World Scientific Publishing Co., EUA 2003, pp 1-684.
- [3] LÖHNAR, RAINALD, *"Applied CFD Techniques, An Introduction based on Finite Element Methods"*, 2ª ed., Ed. John Wiley & Sons Ltd., USA 2001, pp 1-291.
- [4] MONTERO, GUSTAVO, MONTENEGRO, RAFAEL, *"Generación automática de mallas de tetraedros adaptadas a orografías irregulares"*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo Diseño e Ingeniería, Año 2003, Vol. 19, No. 2, pp. 127-144.
- [5] MUÑOZ G., ANTONIO, GONZÁLEZ C., PEDRO, *"Métodos libres de malla para Ecuaciones Diferenciales"*, Reporte Técnico, Coordinación de Ciencias Computacionales del INAOE, México 2003, pp. 1-24.
- [6] RAMIREZ C., FRANCISCO, ORTIZ M., UBALDO, *"Diseño Óptimo de elementos Mecánicos usando Algoritmos de Crecimiento Biológico"*, Boletín de Ingenierías, Enero-Marzo 2004, Vol. VI, No. 22.
- [7] RODRÍGUEZ C., WILSON, PALLARES M., MYRIAM, *"Modelación de flujo de aire alrededor de Automóviles para la determinación de fuerzas "Drag" y "Lift" por medio de Elementos Finitos"*, Revista Ciencias, Mayo-Junio 2005, Vol. VIII, número 16, pp 1-12.
- [8] ROGALSKY, T., DERKSEN, R.W., ROCABIYIK, S., *"Differential Evolution in Aerodynamic Optimization"*, Journal of aircraft, 2006, pp 1-8.
- [9] SERRATE, JOSEP, HUERTA, ANTONIO, *"Generación automática de mallas no estructuradas"*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo Diseño e Ingeniería, Año 2002, Vol. 18, No. 1, pp. 79-23.