

OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL EVOLUTIVA DE MODELOS BIDIMENSIONALES MODELADOS PARAMÉTRICAMENTE. CASO ESFUERZOS PLANOS

Fernando Velázquez Villegas*⁺, Saúl Santillán Gutiérrez**⁺⁺, Jesus M. Dorador González*⁺⁺⁺

**Centro de Diseño y Manufactura e Innovación Tecnológica, Facultad de Ingeniería, UNAM Campus Ciudad Universitaria.*

***Unidad de Desarrollo Tecnológico Querétaro, Facultad de Ingeniería, UNAM Campus Juriquilla, Querétaro.*

⁺ fernvel2@gmail.com, tel: (55) 56228050 ext 107

⁺⁺ saulsan@servidor.unam.mx, tel: (55) 56234142

⁺⁺⁺ dorador@servidor.unam.mx, tel: (55) 56228050 ext 117

RESUMEN

La optimización de forma es un problema recurrente en la ingeniería, sobre todo en el diseño. La geometría de un producto o parte puede determinar tanto su desempeño ante condiciones de operación como la estética del mismo. Este trabajo propone el uso de modelado paramétrico con curvas B-Splines de modelos bidimensionales sometidos a condiciones de esfuerzos planos; los puntos de control de las curvas B-Splines son utilizados como variables de diseño. La optimización de forma se lleva a cabo modificando dichos puntos de control con base en el nivel de esfuerzo en la frontera del modelo. El Análisis por Elementos Finitos se emplea para calcular la distribución de esfuerzos en el componente. El modelado con B-Splines permite que el contorno del modelo se ajuste suavemente a los cambios derivados del proceso. Se presentan dos ejemplos numéricos cuyos resultados muestran que la técnica descrita es capaz de optimizar la forma de los modelos eficazmente.

ABSTRACT

Shape optimization is a recurrent engineering design problem. Product geometry influences performance, aesthetics and operative conditions. The paper presents the proposal of using parametric modeling with B splines curves of bidimensional models under plain stress conditions. The control points of the B splines are used as design variables for shape optimization, based on the boundary stress level of the model elements. The B-Splines model, allows a soft adjustment of the shape according to the geometric changes derived from the process. Two examples are presented.

Keywords: Optimización Estructural, Diseño Óptimo, Análisis por Elementos Finitos.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años los métodos aplicados a la optimización de forma (shape optimization) en el diseño estructural han tenido amplio desarrollo. Presentar un listado de los esfuerzos encaminados en este sentido es una labor que sale de los objetivos de este trabajo. Sin embargo, es menester mencionar algunos cuya contribución es de descartarse.

En 1997, Xie y Steven [1] presentan el libro “Evolutionary Structural Optimization” en el cual se describe el método homónimo del libro (ESO), así como su aplicación a diferentes problemas de diseño óptimo de estructuras. El método se apoya en el Análisis por Elementos Finitos (FEA) para calcular el nivel de utilización (esfuerzo, deformación, etc) de una estructura contenida en un dominio de diseño el cual es modelado con una malla de elementos finitos. A cada elemento dentro del dominio se le asigna un nivel de utilización con base en su comportamiento ante la situación física considerada. El método ESO consiste, en su forma más simple, en la eliminación gradual y lenta de aquellos elementos cuyo nivel de utilización esté por debajo de un porcentaje del nivel máximo o promedio en el dominio. Dicho porcentaje se eleva cada vez que no existan elementos a eliminar y hasta un valor objetivo. La meta es que la estructura resultante sea tal que todos los elementos que la constituyan tengan un nivel de utilización homogéneo.

Casi paralelamente a Xie y Steven, Mattheck y Burkhardt [2] planteaban un método para optimización de forma en dirección opuesta al planteamiento de Xie y Steven: imitar la forma de “diseñar” de la naturaleza observada en el crecimiento de árboles. El crecimiento de un árbol se desarrolla de forma que la superficie del tronco del mismo se encuentra a un nivel homogéneo de utilización. Este método, caracterizado por un crecimiento adaptativo, fue llamado CAO “Computer Adaptative Optimización”. De la misma forma que ESO, CAO utiliza el análisis por elementos finitos para realizar la evaluación del nivel de utilización, en particular, el nivel de esfuerzos.

Algunas propuestas, como las hechas por E. Cervera, J. Trevelyan [3] y M. Cerrolaza, W. Annicchiarico [4], utilizan curvas paramétricas en el modelado del dominio de diseño en lugar de una malla de elementos finitos. La herramienta de cálculo del nivel de utilización en este caso es el Análisis por Elementos Frontera (BEA). A diferencia de los métodos de Xie y Matheck, estas propuestas modifican gradualmente la frontera del dominio de diseño, desplazando los puntos de control de las curvas paramétricas, de acuerdo con el nivel de utilización. La idea en estos casos es que el uso de curvas “suaves” permita que el contorno del diseño se mantenga sin cambios bruscos de dirección. La propuesta de E. Cervera y J. Trevelyan emplea una regla determinística. Hablando del trabajo de M. Cerrolaza y W. Annicchiarico se emplea un método heurístico (Algoritmos Genéticos, GA) como motor de búsqueda de la solución óptima. En ambos casos, las variables de diseño del problema son los puntos de control de las curvas paramétricas empleadas, NURBS y B-Splines respectivamente.

Una revisión más amplia del tema implica considerar las propuestas descritas en [5], [6], [7], [8] entre otros.

La propuesta aquí presentada también implica el modelado geométrico del dominio de diseño con base en curvas B-Spline de 3 grado, y el cálculo del nivel de utilización (esfuerzos) se realiza con FEA en lugar de BEA.

2. MÉTODO

A continuación se muestran las características del método propuesto en el cual se aplica un algoritmo que considera el análisis estructural, vía FEA, del componente de estudio. La geometría es modelada con B-Splines de grado 3. El uso de estas curvas paramétricas permite tener total control sobre la geometría lo que brinda la posibilidad de representar cualquier forma. Las curvas B-Splines se definen con base en un conjunto de puntos de control que se convierten en las variables de diseño de la optimización. Además, se tiene la ventaja de que, gracias a la propiedad de localidad, cambios en los puntos de control sólo afectan localmente la geometría y no al modelo completo [9].

La optimización está basada en la detección de regiones en la frontera con bajo y alto nivel de esfuerzos las cuales son áreas que pueden ser modificadas a través de los puntos de control que las definen. Dicho proceso se resume en la adición y eliminación de material de manera iterativa hasta que se satisface un criterio dado.

2.1 Algoritmo

El algoritmo propuesto se describe en los siguientes párrafos:

- i. El dominio de diseño se define con una serie de puntos en la frontera del mismo y con ellos se construyen las curvas B-Spline. Adicionalmente, se fijan condiciones de frontera en el dominio. Es posible que haya líneas en el dominio que, sin pertenecer a las condiciones de frontera, no deban ser modificadas; en estos puntos se deben indicar.
- ii. La malla de elementos finitos es creada y se lleva a cabo el análisis estructural.
- iii. Las regiones de bajo y alto esfuerzo se detectan por medio del nivel de esfuerzo de los nodos sobre la frontera. Si dichas regiones no tienen algún tipo de restricción, son modificadas: regiones de

nivel bajo sufren eliminación de material y aquellas con alto nivel son adicionadas.

$$\begin{array}{ll} \sigma_i \leq TR \cdot \sigma_{\max} & \text{Eliminación de material} \\ \sigma_i \geq TA \cdot \sigma_{\max} \text{ ó } \sigma_i \geq \sigma_y & \text{Adición de materia} \\ i = 1, 2, 3, \dots, n & \end{array}$$

donde: σ_i es el esfuerzo de von Mises del i-ésimo nodo de la frontera, σ_{\max} es el esfuerzo de von Mises máximo en la estructura, σ_y es el esfuerzo de cedencia del material, $0 \leq TR < 1$ es la tasa de eliminación, $TA \leq 1$ es la tasa de adición, y n es el número de nodos en la frontera.

En el modelado con curvas paramétricas B-Spline, para cada punto C_i de la curva existen $p+1$ puntos de control que controlan su posición, donde p es el grado de la curva [9]. La contribución de dichos $p+1$ puntos de control a la posición de C_i depende del valor del parámetro en el punto. De ahí que para modificar la posición de un punto sobre la frontera requiera desplazar $p+1$ puntos de control en la dirección perpendicular a la curva en C_i : hacia el interior del dominio en el caso de que se tenga que remover material, y hacia el exterior en el caso de adición. La magnitud del desplazamiento de cada uno de los puntos de control depende del nivel de esfuerzo de los nodos sobre los cuales influye y una fracción del tamaño de los elementos finitos en la malla.

iv. Los pasos ii y iii se llevan a cabo hasta que no existe ningún punto C_i que sea susceptible de cambio o no exista cambio considerable en la geometría después de varias iteraciones. En dicho momento los valores de TR y TA son modificados con las cantidades TRE y -TAE.

v. Los pasos ii, iii y iv se repiten hasta que se alcanza el criterio de paro definido o ya no sea posible modificar TR y TA.

2.2 Control de distorsiones en la frontera

Cuando la distancia, medida sobre la curva, entre los puntos que definen una B-Spline y/o aquella entre los puntos de control de la misma es apreciablemente distinta pueden presentarse radios de curvatura muy pequeños y, por ende, distorsiones en la frontera. Para evitar lo anterior, se sensa la distancia entre los puntos en cada iteración. Cuando la diferencia en las distancias es considerable (alrededor del 30%), se procede a redefinir los puntos C_i de la curva, por lo que el número de puntos C_i variará respecto a la cantidad existente al inicio del proceso [9].

2.3 Criterio de paro

El criterio de paro empleado en esta propuesta va en la dirección de evitar la presencia de gradientes de esfuerzo en zonas localizadas de la frontera [5]. Para ello se considera un valor de referencia (σ_{ref}) contra el cual son comparados los esfuerzos de cada uno de los nodos en las aristas de la geometría, midiendo así, el nivel de esfuerzos. El nivel de esfuerzos (NS) homogéneo se puede obtener minimizando la siguiente función:

$$NS = \sum (\sigma_i - \sigma_{ref})^2$$

Por lo tanto, el criterio de paro tiene la forma:

$$(NS_t - NS_{t+1}) / NS_t \leq \lim$$

donde, t indica la t-ésima iteración y $\lim \leq 10^{-4}$

3. APLICACIÓN

Se muestran un par de ejemplos de aplicación del algoritmo propuesto. Se considera en ambos casos un material cuyas propiedades son: módulo de Young = 210 Gpa, coeficiente de Poisson = 0.3, esfuerzo de cedencia 280 Mpa y se emplea un espesor de 1 mm. Las geometrías a optimizar se someten a condiciones de esfuerzo plano.

3.1 Viga corta en cantiliver

Éste es un ejemplo clásico en el campo de la optimización de forma. Se modela un dominio rectangular con dimensiones 160 mm X 100 mm y 1 mm de espesor, con una carga vertical negativa de 10 N aplicada en un extremo, dado que el algoritmo opera con base en el nivel de esfuerzos no es necesario aplicar una carga más grande. La viga es empotrada en los vértices superior e inferior izquierdos. Los valores de los parámetros de optimización son los siguientes: TR=0.1, TA=0.99, TRE=0.01, TAE=0.

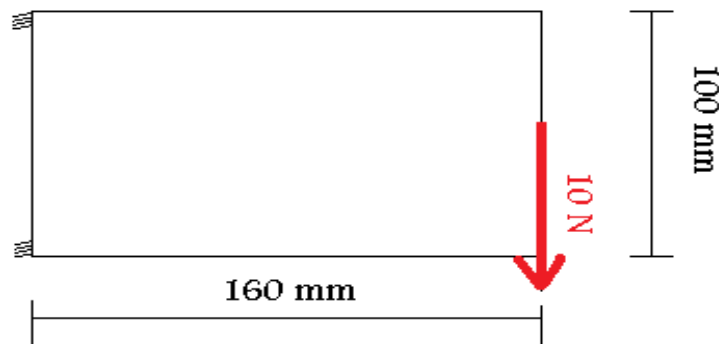


Figura 1. Dominio de diseño de la viga corta en cantiliver

El análisis estructural del dominio de diseño arrojó los siguientes resultados: área inicial =160 cm², $\sigma_{V.M.max} = 1.4$ Mpa, $\sigma_{V.M.promedio} = 0.33$ Mpa. Después de 301 iteraciones los valores de los parámetros cambia a TR₃₀₁ = 0.42 y TR₃₀₁ = 0.99, mientras que el área disminuye a área₃₀₁ = 11.4cm² (reducción al 7.12% del área inicial), $\sigma_{V.M.max} = 2.85$ Mpa, $\sigma_{V.M.promedio} = 1.2$ Mpa. En las figuras 2 y 3 se observan diferentes etapas del proceso. En primer lugar una comparación de los esfuerzos nodales ordenados en forma ascendente (Fig 2) para iteraciones diferentes del proceso, donde es evidente la tendencia de dichos valores a acercarse cada vez más a un valor medio, es decir, hacer homogéneo el nivel de esfuerzos.

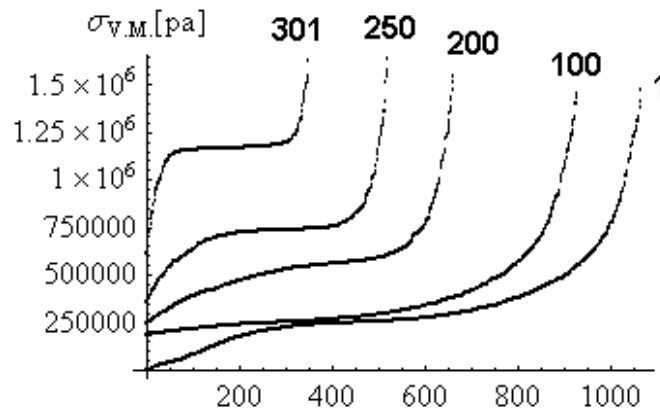


Figura 2. Esfuerzos de von Mises ordenados ascendentemente de las iteraciones 1, 100, 200, 250 y 301.

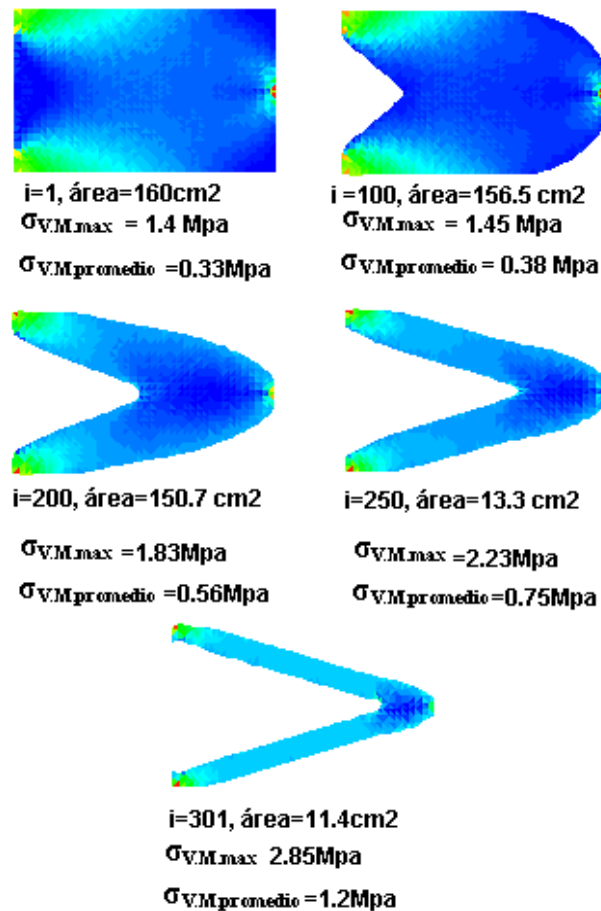


Figura 3. Desarrollo de la forma óptima para la viga corta en cantiliver

La figura 3 muestra el gráfico de esfuerzos de las iteraciones de la figura anterior. Al observar la distribución de los esfuerzos en la geometría final, corroboramos que el nivel de esfuerzos es homogéneo para regiones amplias del dominio. En la imagen correspondiente al dominio de diseño ($i=1$) es evidente la heterogeneidad en el nivel de esfuerzos; las regiones en color azul son las que serán modificadas durante el proceso y con base en el valor de TR que exista en cada una de las iteraciones, mientras que las regiones verdes cercanas a los extremos izquierdos tendrán menor oportunidad de cambiar pues el valor del esfuerzo en ellas es mayor. Conforme el proceso avanza las regiones en color verde (esfuerzo mayor) pierden terreno integrándose con la región de menor esfuerzo en color azul. Lo anterior es una evidencia de que el nivel de esfuerzos tiende a hacerse homogéneo conforme el proceso avanza hasta llegar a la configuración final.

3.2 Barra delgada con carga axial

El segundo ejemplo mostrado consiste en la optimización de un dominio rectangular de 120 mm X 20 mm y espesor 1 mm, sometido a una carga distribuida de 450 N/m en la dirección horizontal aplicada en el extremo libre de la misma como se muestra en la figura 4. Las aristas susceptibles de modificación son un segmento centrado de 80 milímetros en cada una de las líneas que definen el contorno superior e inferior del dominio. El resto del perímetro de la geometría no sufre cambio alguno.

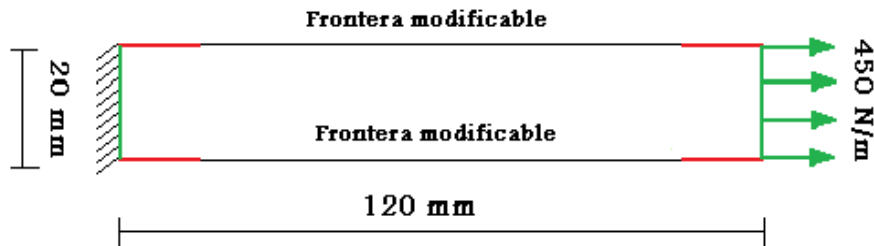


Figura 4. Dominio de diseño de una barra delgada con carga axial

Se emplearon elementos finitos triangulares de 2 mm promedio por lado. Se consideraron los siguientes valores de los parámetros de optimización: $TR=0.5$, $TA=0.99$, $TRE=0.01$, $TAE=0$. Del análisis de la estructura se obtuvo la siguiente información del dominio: área inicial= 24cm^2 , $\sigma_{\max} = 8.02\text{ MPa}$, $\sigma_{\text{promedio}} = 4.51\text{MPa}$. Hay que señalar que el valor TR elegido es elevado aparentemente, sin embargo, tomando en cuenta el $\sigma_{\min} = 3.78\text{ MPa}$ corresponde al 47% del σ_{\max} , es de esperar que valores bajos de TR resulten en iteraciones y cálculos innecesarios.

Al algoritmo le toma 786 iteraciones alcanzar un valor de $TR=1$. Lo anterior no significa que todo el contorno de la geometría se encuentre al mismo nivel de esfuerzos. Hay que recordar que existen regiones de la frontera que no pueden ser modificadas, por lo que, a pesar de que estas zonas tengan un nivel inferior de esfuerzo, al no sufrir cambio alguno el valor de TR se incrementa cada que las zonas modificables no experimentan cambios para el valor que el parámetro tenga en una iteración dada.

El diseño resultante, obtenido después de 786 iteraciones, tiene las siguientes características: área = 14.1 cm^2 , $\sigma_{\max} = 14.04\text{ MPa}$, $\sigma_{\text{promedio}} = 8.13\text{ MPa}$. Con una reducción del 41.1% del área se obtuvieron aumentos del 75.1% y 81.1% en los esfuerzos máximo y medio del componente respectivamente.

En las imágenes siguientes se encuentra el desarrollo de los esfuerzos máximo, medio y mínimo durante el proceso. Se destacan las tendencias de los mismos, en el primer y segundo casos a la alza y en el tercero a la baja. En los dos primeros casos no se logra una estabilización dado que se alcanza al valor límite $TR = 1$ antes de lograr la homogeneidad de esfuerzos. En realidad, en este caso, no es posible llegar a dicha característica ya que hay regiones de muy bajo esfuerzo en la frontera, justo en los extremos del dominio, que además no pueden ser modificadas por la definición del caso.

Sin embargo, el valor medio del esfuerzo en la frontera, calculado para el diseño final, es $\sigma_{\text{promedioFrontera}} = 9.55\text{ MPa}$, valor apenas por encima del esfuerzo medio de toda la geometría. Lo anterior es una evidencia de que el nivel de esfuerzos o utilización en la región esforzada del diseño, la región central adelgazada para ser precisos, es homogénea.

En la figura 7 se observan los gráficos de esfuerzos de von Mises de algunas etapas del proceso de optimización. Es de apreciarse que en cada una de las imágenes mostradas en la figura la distribución de esfuerzos en la zona optimizada permanece homogénea.

Por último, en la figura 8, se muestra el detalle de la zona de mayor modificación en la barra. El perfil de la geometría muestra que la curva B-Spline se ajusta de manera suave a las modificaciones propias del proceso de optimización.

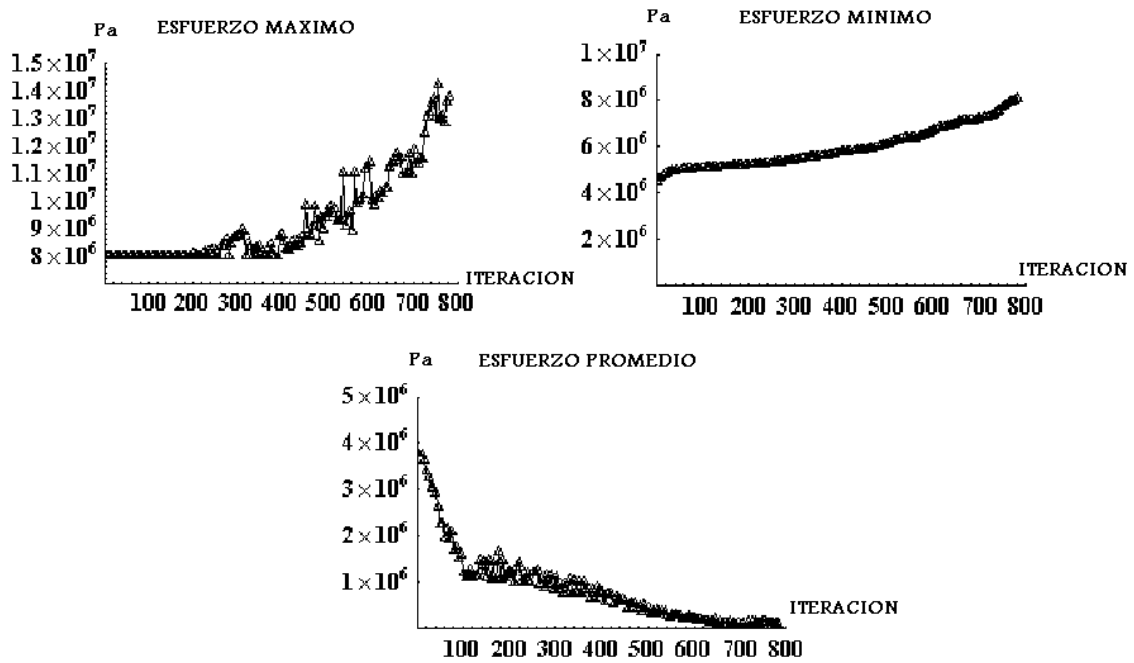


Figura 5. Evolución de los esfuerzos máximos, medios y mínimos en la optimización de la barra delgada

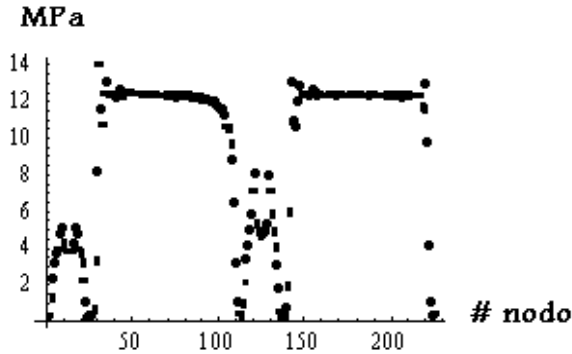


Figura 6. Esfuerzos de von Mises en la frontera de la barra delgada optimizada

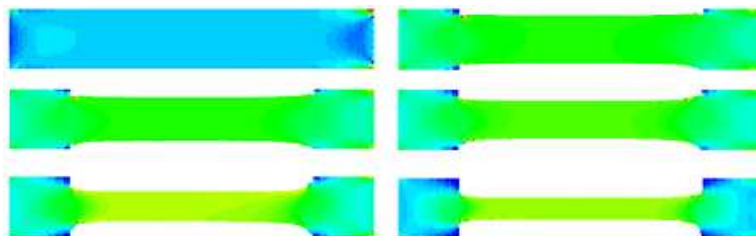


Figura 7. Diferentes etapas en la optimización de la barra delgada: iteraciones 1, 150, 300, 450, 600 y 786.

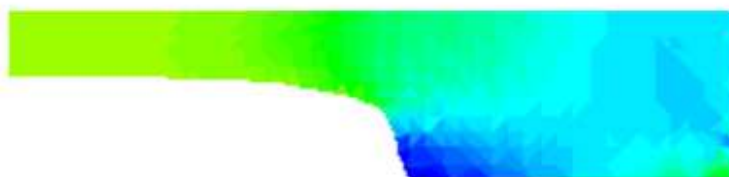


Figura 8. Detalle de la geometría resultante

4. CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos, el uso de curvas paramétricas y sus puntos de control como variables de diseño en el proceso de optimización de forma, demuestra ser eficaz en cuanto a la generación de estructuras con nivel de esfuerzos homogéneo. Además, la característica de suavidad que presenta este tipo de modelado evita la aparición de aristas rugosas en el diseño obtenido.

Por otra parte, como lo mencionan Cervera y Trevelyan [3], las curvas paramétricas brindan gran flexibilidad en el diseño al manipular directamente la frontera del dominio por medio de ellas. Lo anterior es demostrado por los dos ejemplos de aplicación presentados en el apartado 3.

5. REFERENCIAS

- [1] Xie Y. M., Steven G.P. *Evolutionary Structural Optimization (ESO)*. Springer, 1997.
- [2] Mattheck C., Burkhardt S. *A new method of structural shape optimisation based on biological growth*. Int. J. Fatigue, 1990.
- [3] Cervera E., Trevelyan J. *Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms*. Computers and Structures 83, 2005.
- [4] Cerrolaza M., Annicchiarico W., Martínez M. *Optimization of 2D boundary element models using B-Splines and genetic algorithms*. Eng. Anal Boundary Elem., 2000.
- [5] Haftka R.T., Grandhi R. *Structural shape optimization, a survey*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1986.
- [6] Querin O., Xie Y., Steven G. *Evolutionary structural optimization (ESO) using a bidirectional algorithm*. Eng. Computat., 1998.
- [7] Zienkiewicz O., Cambell J. *Shape optimization and sequential linear programming, optimum structural design*. New York, Wiley, 1973.
- [8] Sethian J. *Level Set Methods and Fast Marching Methods. Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge Monograph on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, 1999
- [9] Shene C. (1998, July 1). *Introduction to computing with geometry. Course Notes*. [documento WWW]. URL: <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/>