

## IDENTIFICACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO NO LINEAL EN ESTRUCTURAS ESBELTAS

Juan C. Jáuregui Correa, David Jiménez Villalobos, Eduardo Rubio Cerda

CIATEQ A.C., Unidad Aguascalientes, Circuito Aguascalientes Norte 135, Parque Industrial de Valle de Aguascalientes, Aguascalientes, Ags., C.P. 20358, México, Tel. (+52) 449 9731060 Fax (+52) 449 9731070  
[jjaur@ciateq.mx](mailto:jjaur@ciateq.mx), [david.jimenez@ciateq.mx](mailto:david.jimenez@ciateq.mx), [eduardo.rubio@ciateq.mx](mailto:eduardo.rubio@ciateq.mx)

### RESUMEN

El diseño de máquinas y estructuras modernas busca mejorar todos los aspectos relacionados con su desempeño, como eficiencia, costo, peso y velocidades de operación. Estas condiciones han llevado al desarrollo de máquinas que utilizan elementos estructurales esbeltos. Ejemplos de la aplicación de estos elementos se encuentran en turbinas de gas, generadores eólicos, helicópteros y aeronaves, entre otros. También, por razones similares, diferentes estructuras civiles emplean elementos esbeltos en sus edificaciones. Por otro lado, los requisitos de operación y eficiencia han hecho necesario que las velocidades y aceleraciones de las máquinas aumenten. Estos dos aspectos, la necesidad de elementos esbeltos ligeros y las velocidades de operación, provocan fenómenos dinámicos no lineales que difícilmente se pueden identificar con los modelos de la dinámica clásica.

Dos elementos importantes a considerar se presentan en la identificación de los fenómenos dinámicos de estructuras esbeltas: por un lado, se requiere de modelos matemáticos sofisticados que usan esquemas numéricos de solución complejos y que permiten identificar algunos de los fenómenos que se presentan en campo. Por otro lado, los sistemas de medición de vibraciones captan todas las señales que produce una máquina en operación, lo que dificulta la identificación de los fenómenos no lineales. Es así que en este trabajo se presentan esquemas de identificación del comportamiento no lineal en estructuras esbeltas. Como caso de estudio se desarrolla esta metodología con una viga esbelta montada en voladizo.

### ABSTRACT

Trends in machine design are weight reduction and higher speed. In order to achieve these requirements, modern machinery is design with lighter and slender elements. Samples of these designs are found in the aerospace industry, such as helicopter blades, airplane wings among others. They also can be found in modern turbomachinery, where their blades are longer and lighter than former machines. These elements are critical in wind turbines, where new designs require larger blades in order to generate more power. Other aspect that affects these elements is the increment in operating speeds. This factor is critical because higher speeds produce higher excitation frequency, and when they combine with lighter elements they can excite their natural frequencies.

Slender elements show a nonlinear dynamic behavior. This behavior is due to their geometry, in the sense that they are very stiff in two directions and very soft in the other one. In order to analyze the dynamics of slender elements, it is necessary to developed mathematical models that describe them, and design algorithms to identify its occurrence in field measurements. In this paper we discuss a dynamic model based on the large deformation theory; and, from experimental data, we present different ways to identify the nonlinear behavior of a cantilever beam.

### INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las estructuras esbeltas obedece a las necesidades de incrementar las velocidades y aceleraciones de la maquinaria moderna, que al mismo tiempo requieren incorporar componentes más ligeros. Las estructuras esbeltas se aplican en diversos equipos, como en la industria aeronáutica (aspas de helicópteros y alas de aviones), también se usan tanto en las turbinas de gas como en las de vapor, donde cada vez se diseñan álabes más esbeltos. Por otro lado, las máquinas eólicas de generación eléctrica requieren de aspás más grandes para poder generar mayor potencia. En todos estos casos, las altas velocidades de operación generan altas frecuencias que excitan el comportamiento no lineal que caracteriza a las estructuras esbeltas.

Las características no lineales de estos elementos se pueden deber a que las estructuras esbeltas presentan una sección transversal muy delgada en contraste con una relativa gran longitud. Esta relación predomina sobre una de las dimensiones, mientras que la otra dimensión pudiera presentar características propias de una placa. La esbeltez de estas estructuras produce un comportamiento no lineal intrínseco a su geometría, y no necesariamente a las propiedades del material. Esta no linealidad se refleja en el comportamiento dinámico de diversas maneras, pero en general su comportamiento se manifiesta en un rango amplio de frecuencias. Este rango de frecuencias puede aproximarse a las frecuencias de excitación y limitar significativamente los rangos de operación de las máquinas. Por otro lado, las técnicas tradicionales de identificación del comportamiento dinámico se aplican a sistemas lineales, por lo que es necesario desarrollar métodos alternos para lograr su identificación. Antes de iniciar la descripción de los métodos de identificación, es importante resumir los trabajos que se han presentado en la literatura.

Oh y otros [1], desarrollaron un modelo dinámico para analizar álabes sometidos a rotación, su modelo incluye una viga delgada de material compuesto y para validarlo recurren a resultados experimentales que estaban disponibles en la literatura. Sabancu y Evran [2], determinan la estabilidad dinámica de una viga tipo Timoshenko con un ángulo inicial de torcimiento, para su análisis desarrollan un modelo de elementos finitos al que someten a una carga lateral sobre la sección axisimétrica de un perfil aerodinámico. Otros trabajos han demostrado que los efectos de deformación cortante, la inercia rotacional, la esbeltez y el ángulo inicial de torcimiento determinan las frecuencias naturales de las vigas esbeltas [3,4]

La identificación de los fenómenos no lineales que se presentan en este trabajo, se basan en la determinación de los parámetros dinámicos a partir de la teoría de las grandes deformaciones [5,6]. Los problemas no lineales se encuentran en diversos fenómenos físicos [7,8,9,10], que se manifiestan como “salto”, vibraciones auto-excitadas, vibraciones sub- y super-armónicas e interacciones modales. Estos fenómenos son difíciles de controlar, y para poderlo hacer es fundamental contar con modelos dinámicos que mejor describan su comportamiento. Al respecto, se han escrito libros sobre vibraciones no lineales, pero es importante resaltar la contribución de Balachabdran [11] y de Young y otros [12], en relación al modelado de estructuras esbeltas.

Después de revisar algunos de los trabajos relacionados con el tema de la dinámica no lineal de sistemas esbeltos, es importante reconocer que los modelos matemáticos están basados en la teoría de la deformación elástica de grandes deformaciones. A este respecto, existen varias aproximaciones al tema que se deben resaltar: La teoría de grandes deformaciones se puede aplicar a elementos sólidos, y a vigas o placas; con esta teoría se pueden construir modelos que representan el comportamiento dinámico de estructuras cuya forma corresponde con la ecuación de Duffing [13]. Sin embargo, para el caso de los elementos sólidos, los coeficientes no lineales de la ecuación sólo tienen efecto cuando las deformaciones son muy grandes, que en los casos prácticos dichas deformaciones se presentarían una vez que el material hubiese alcanzado su deformación plástica; para estos casos es recomendable utilizar modelos basados en la teoría de la viscoelasticidad [14]. Por otro lado, la teoría de las grandes deformaciones de los elementos viga o placa están basadas en su radio de curvatura, y los coeficientes no lineales de estos modelos si se pueden alcanzar en casos prácticos, cuando su geometría es muy esbelta. Es por ello que este trabajo se basa en modelos contruidos a partir de la teoría de grandes deformaciones de elementos viga.

La identificación de los sistemas dinámicos no lineales presenta grandes retos. En primer lugar, la respuesta del sistema a una excitación sinusoidal sí puede ser armónica, pero pierde su naturaleza senoidal. Esto se define como distorsión armónica. También la amplitud de la respuesta puede no ser proporcional a la excitación, lo que puede ser otro indicio de la existencia de una no linealidad. Y otra particularidad de estos sistemas es que los coeficientes no lineales actúan como “amortiguadores estructurales”, de tal forma que cuando se excitan a la frecuencia natural (lineal) no presentan resonancia. En este trabajo se discuten estas características de los sistemas no lineales y se analiza su aplicación como técnicas de identificación en aplicaciones prácticas.

**NOMENCLATURA**

$a$	Coefficiente del polinomio
$E$	Módulo de elasticidad
$f$	Fuerza de excitación
$I$	Segundo momento de área
$l$	Longitud de la viga
$m$	Masa
$n$	Número de nodos
$t$	Tiempo
$T$	Energía cinética
$V$	Volumen, del elemento
$w$	Desplazamiento perpendicular (dirección z)
$W$	Energía de deformación
$x$	Dimensión longitudinal
$z$	Dimensión perpendicular
$\varepsilon$	Tensor de deformación
$\sigma$	Esfuerzo de tensión
$\square$	Ángulo de deflexión
$t$	Subíndice,, derivada con respecto al tiempo
$i$	Subíndice, nodos 1 y 2
$e$	Superíndice, dominio del elemento

**MODELO NO LINEAL DE UNA VIGA ESBELTA EN VOLADIZO**

El modelo dinámico que se utiliza para analizar el comportamiento de una viga en voladizo (Fig. 1) se obtiene aplicando la ecuación de Hamilton de acuerdo con [5] y se aplica a un elemento finito tipo viga unidimensional de dos nodos.

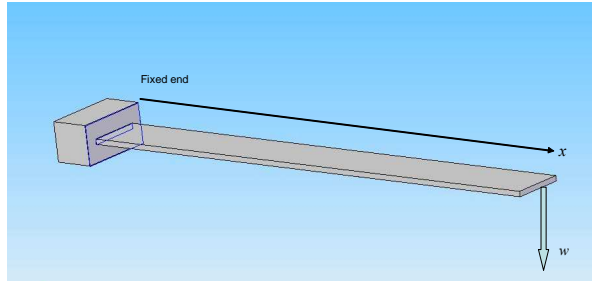


Figura 1. Esquema de una viga esbelta en voladizo.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^e}{\partial \dot{w}_i} \right) + \frac{\partial W^e}{\partial w_i} = 0 \tag{1}$$

Las energías cinética y de deformación se determinan aproximando los desplazamientos como una función polinomial, considerando que sólo varían como función de  $x$

$$w(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1} \tag{2}$$

La energía de deformación se expresa como:

$$W_I^e = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV \quad (3)$$

Asumiendo que el campo de deformación es función de la curvatura, y considerando todos sus términos:

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} \quad (4)$$

Entonces, la variación de la energía de deformación en términos de los desplazamientos nodales se expresa como:

$$\frac{\partial W_I^e}{\partial w_i} = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial}{\partial a_1} (\varepsilon z)^2 \frac{\partial a_1}{\partial w_i} + \frac{\partial}{\partial a_2} (\varepsilon z)^2 \frac{\partial a_2}{\partial w_i} \right) dx \quad (5)$$

La variación de la energía cinética se obtiene asumiendo que la masa está distribuida en cada nodo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^e}{\partial w_{ii}} \right) = m_i w_{iii} \quad (6)$$

A partir de las ecuaciones (5) y (6) se obtiene un sistema con dos grados de libertad en términos del desplazamiento nodal  $w$  y de la rotación  $\theta$ . Asumiendo el caso de un elemento viga empotrada en un extremo y aproximando

$$\theta_2 = \frac{3w_2}{2l} \quad (7)$$

Se obtiene la ecuación de Duffing para un sistema con un solo grado de libertad.

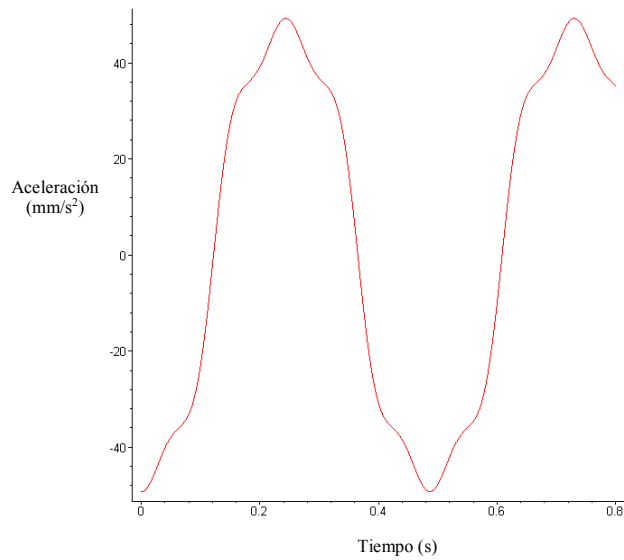
$$mw_{tt} + EI \left( \frac{1485w^5}{385l^7} - \frac{162w^3}{35l^5} + \frac{3w}{l^3} \right) = f(t) \quad (8)$$

Este modelo simplificado permite encontrar las características dinámicas básicas de una viga en voladizo.

### RESULTADOS NUMERICOS

Con el modelo de la ecuación (8) se estima el comportamiento dinámico de la viga en voladizo y se identifican los efectos no lineales. Estos efectos están determinados por los términos elevados a la tercera y quinta potencias. La solución de la ecuación se realizó utilizando el método de Runge-Kutta.

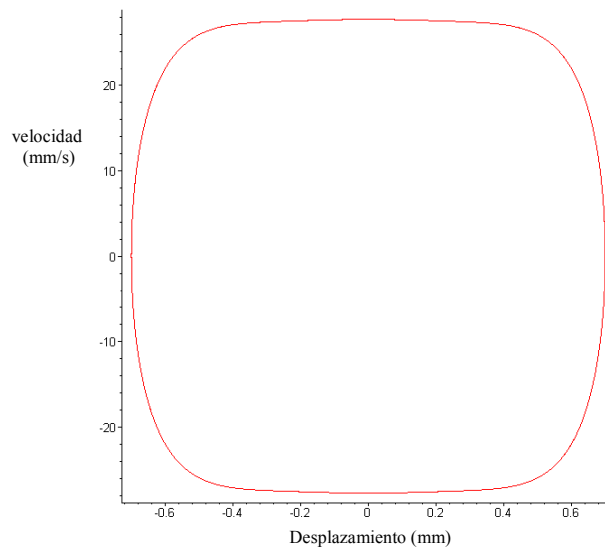
La identificación de los efectos más sobresalientes se muestra en las siguientes figuras. La Fig. 2 representa la respuesta en el tiempo de la aceleración del extremo libre de la viga en voladizo.



**Figura 2. Aceleración. Respuesta libre del sistema.**

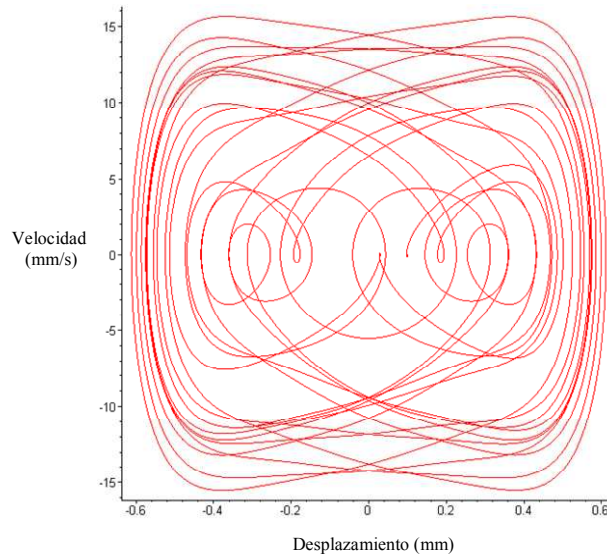
Es importante resaltar que la aceleración libre presenta un comportamiento armónico, pero la respuesta no es sinusoidal, lo que es un claro indicio de una distorsión armónica. La frecuencia de la respuesta no lineal se calculó en 2.22 Hz.

Otra indicación del fenómeno no lineal se obtiene del diagrama de fase. En este caso el diagrama presenta una forma “rectangular”, cuando un sistema lineal presenta una forma elíptica (figura 3).



**Figura 3. Diagrama fase. Respuesta libre.**

Otro análisis de los resultados se hace cuando el sistema se somete a la una excitación sinusoidal con la misma frecuencia que la frecuencia natural. En este caso el sistema no presenta resonancia, ya que los coeficientes no lineales actúan como un amortiguador estructural. En la Fig. 4. se incluye el diagrama de fase de la solución forzada.



**Figura 4. Diagrama de fase. Respuesta forzada.**

El diagrama de fase presenta dos aspectos del comportamiento dinámico importantes: la presencia de dos “polos” asociados a la frecuencia de excitación, y la forma “rectangular” de la evolvente. Los dos polos corresponden con un doble espacio de solución del sistema, y la forma rectangular se debe al efecto de la distorsión armónica. En este caso la frecuencia de la respuesta es de 5 Hz mientras que la frecuencia de excitación se igualó a la frecuencia natural del sistema lineal (2.7 Hz). La otra particularidad de esta solución es que el sistema no entra en resonancia.

Con estos resultados teóricos se diseñó un banco experimental y se establecieron pruebas de campo para comprobar cuáles son las técnicas de identificación más adecuadas.

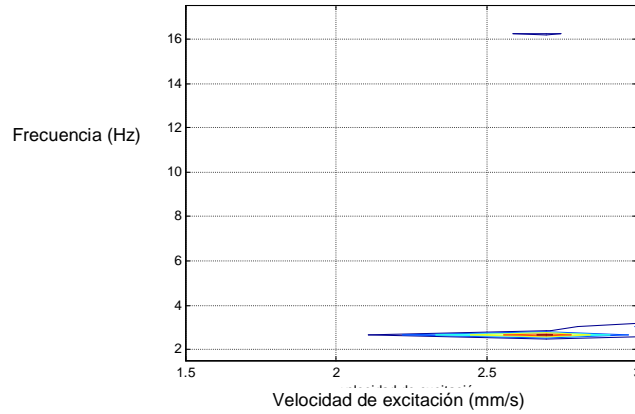
#### **PRUEBAS EXPERIMENTALES**

Los fenómenos no lineales comúnmente se identifican en los espectros de frecuencia (FFT) como frecuencias subarmónicas o a altas frecuencias dentro de un rango amplio. Sin embargo, esta manera de identificarlos puede contener otro tipo de señales que no necesariamente corresponden con las características no lineales de un sistema esbelto. También se puede hacer un barrido de frecuencia ascendente y descendente, y determinar la presencia del fenómeno de salto. Pero, en muy pocos casos este procedimiento se puede llevar a cabo en la práctica.

Para poder encontrar otros métodos de identificación, se construyó un banco experimental con el propósito de medir las vibraciones en una viga esbelta montada en voladizo. El banco consiste de una bobina de excitación que permite variar la frecuencia y la amplitud de excitación. A esta bobina de excitación se le montó una viga de acero muy delgada y en el extremo libre se le instaló un acelerómetro MEMS cuya masa es despreciable y no modifica las condiciones dinámicas de la viga.

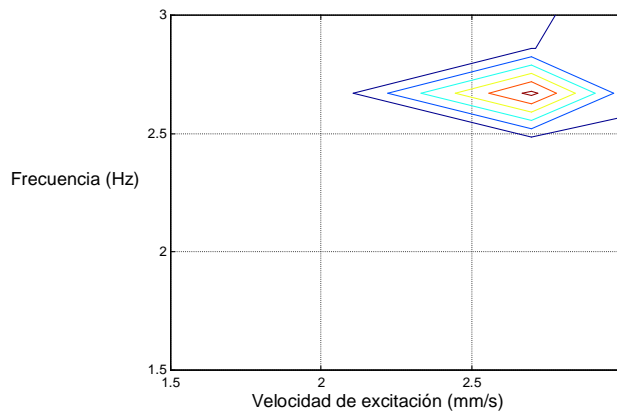
El objetivo del experimento fue estudiar diferentes procedimientos de análisis de los datos obtenidos con el acelerómetro, y de esta manera poder identificar la naturaleza no lineal de las vibraciones de la viga esbelta. Para ello se corrieron tres tipos de prueba: la primera se hizo variando la frecuencia de excitación con una amplitud constante hasta identificar la frecuencia que producía la mayor amplitud (en general la frecuencia natural); la segunda se hizo variando la amplitud de excitación conservando la frecuencia natural. Y la tercera se hizo variando la frecuencia de excitación siguiendo una rampa ascendente y luego descendente. Los resultados de las pruebas se muestran en las siguientes figuras.

La Fig. 5 muestra un diagrama de contornos de la primera prueba (este diagrama es una variante del diagrama de cascada).



**Figura 5. Diagrama de cascada. Las ordenadas son la frecuencia de excitación y las abscisas son la frecuencia del acelerómetro.**

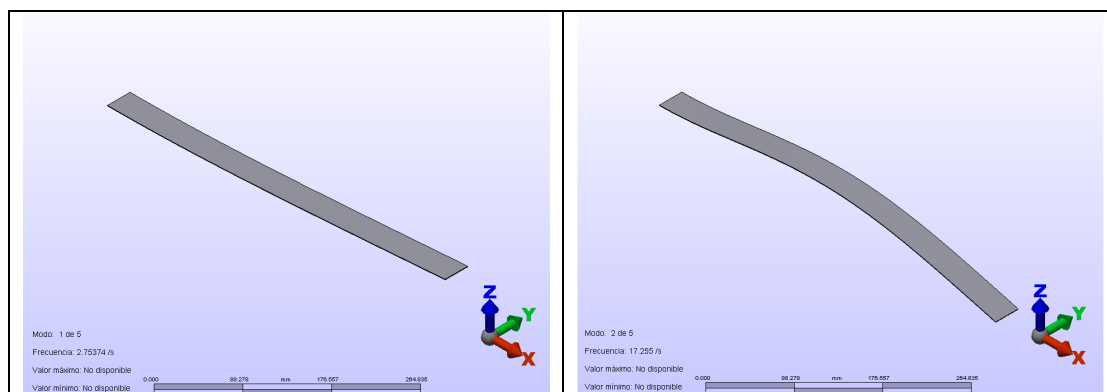
En este diagrama se muestran dos zonas de altas frecuencias, una alrededor de los 2.7 Hz y otro alrededor de 16.5 Hz. Para poder analizar mejor estos datos, se hizo un acercamiento alrededor de los 2.7 Hz. (Fig. 6)



**Figura 6. Acercamiento del diagrama de cascada.**

El punto donde coinciden las frecuencias más altas es a 2.7 Hz, por lo que se identifica como la frecuencia natural

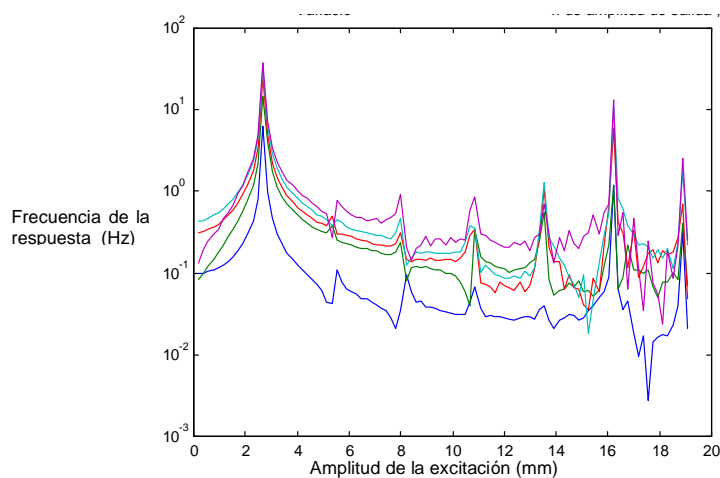
Para comprobar el valor de la frecuencia natural, se modeló con elementos finitos la viga esbelta. Con este análisis se identificaron la primera y segunda frecuencias naturales, como se muestra en la Fig. 7. Con este modelo se identificó la primera frecuencia natural a 2.75 Hz y la segunda a 17.25 Hz.



**Figura 7. Resultados del modelo de elementos finitos.**

Una vez identificada la frecuencia que produce la mayor vibración (2.7 Hz), se corrió la segunda prueba. En este caso se mantuvo constante la frecuencia de excitación (2.7 Hz) y se aumentó paulatinamente la amplitud (de 2mm a 8 mm). La Fig. 8 ilustra el espectro de frecuencias para las diferentes amplitudes de excitación, pero este espectro no nos permite identificar la no linealidad de manera directa

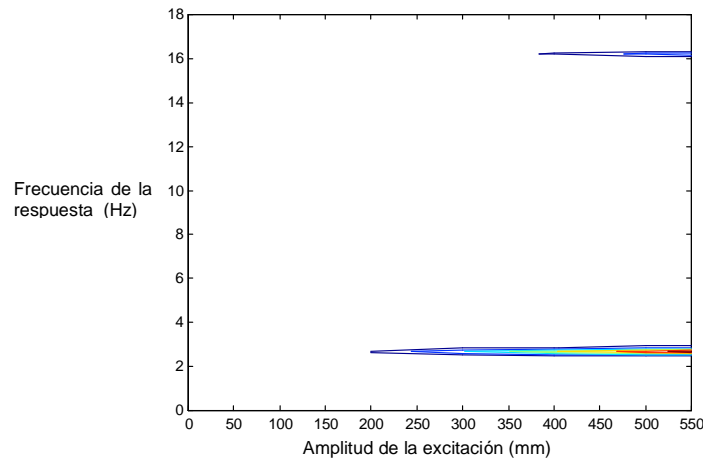
Para corroborar la información del espectro de frecuencia, se construyó el diagrama de cascada de la segunda prueba (Fig. 9)



**Figura 8. Espectro de frecuencia para diferentes amplitudes.**

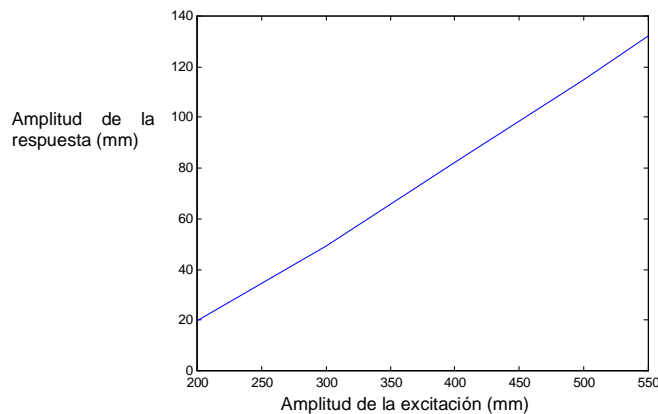
En esta figura se puede ver como aumenta la amplitud de vibración al aumentar la amplitud de la excitación y como se presenta una frecuencia adicional alrededor de los 16.5 Hz. Sin embargo, el simple análisis de la variación de la frecuencia de salida no es suficiente para determinar la presencia de no linealidades. Es necesario revisar la relación entre la amplitud de la excitación y la amplitud de la salida, este análisis se grafica en la Fig. 10. En ellas se puede observar la relación entre la amplitud de entrada y el valor RMS de la vibración medida con el acelerómetro, también se aprecia que la relación es lineal.





**Figura 9. Diagrama de cascada. Frecuencia de salida vs. amplitud de vibración.**

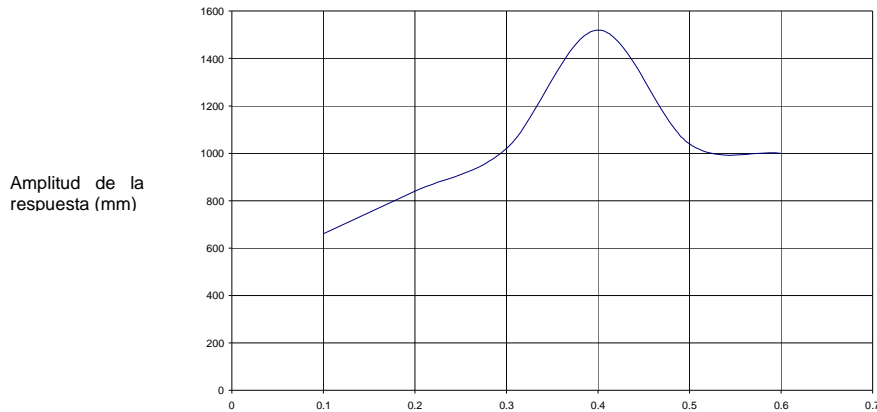
Para comparar el resultado experimental, se calculó la misma relación con el modelo numérico, como se muestra en la Fig. 11. En la gráfica del modelo numérico se puede ver que a bajas amplitudes de excitación el comportamiento es lineal, pero a cierto nivel de amplitud la relación entre la entrada y la salida deja de ser proporcional.



**Figura 10. Variación de la amplitud de salida contra la amplitud de entrada.**

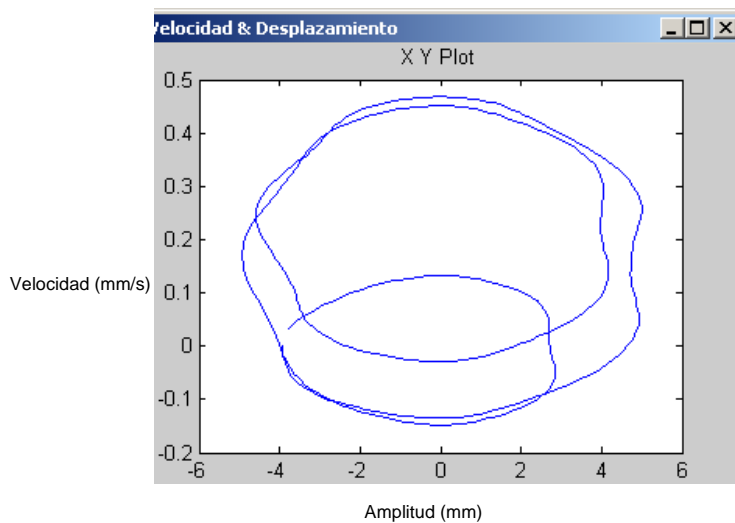
Al analizar los resultados de los espectros de frecuencia se puede concluir que este análisis no facilita la identificación de los efectos no lineales. Para que el espectro sea sensible es necesario excitar a la viga con amplitudes muy grandes.

Por último, se construyó el diagrama de fase de los datos experimentales. Para ello se construyó el diagrama de fase de la vibración libre (Fig. 12) y después el diagrama de fase de la vibración forzada



**Figura 11. Variación de la amplitud de salida del modelo numérico.**  
Amplitud de la excitación (mm)

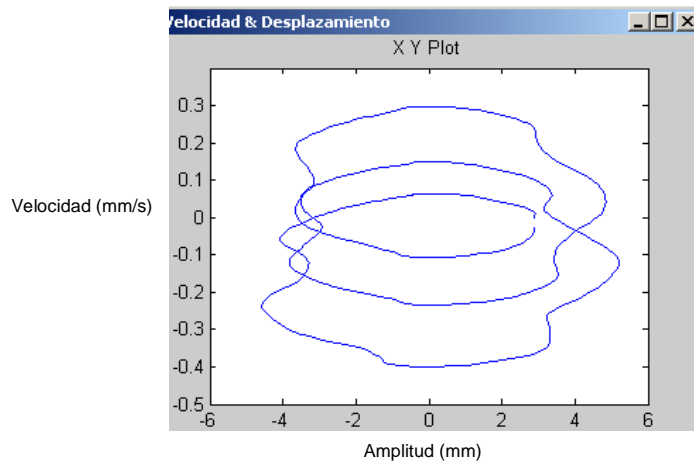
Fue necesario integrar las mediciones de aceleración para obtener la respuesta en el tiempo de la velocidad y el desplazamiento. La manera más fácil de hacer esta integración es en el dominio de la frecuencia, pero esto presenta una gran limitante, ya que al transformar la señal en el dominio de la frecuencia se pierden los efectos transitorios y se “linealiza” la señal. Esto se evitó integrando la señal con un circuito analógico, que además se puede simular con la computadora. La Fig. 13 muestra el diagrama de fase de los datos experimentales de la respuesta a una excitación forzada.



**Figura 12. Diagrama de fase. Vibración libre, datos experimentales.**

Al comparar la forma de los diagramas fase de la respuesta libre y la respuesta forzada, se puede observar que se presenta la misma forma poligonal en los dos casos

Con este último análisis se llega a la conclusión que una de las herramientas más útiles para identificar los efectos no lineales en estructuras esbeltas es el diagrama de fase.



**Figura 13. Diagrama de fase. Vibración forzada, datos experimentales.**

Para concluir el análisis, se hizo un barrido de frecuencias siguiendo una rampa ascendente y después descendente, con estas mediciones se buscó identificar la presencia del fenómeno de salto. Si el rango de frecuencia y la amplitud en ambas corridas se mantienen igual, el sistema no presenta salto. Para poder identificar este fenómeno, los datos experimentales se procesaron con la transformada “wavelet” y los resultados se graficaron en un diagrama de contornos (Fig. 14). En este diagrama el eje vertical indica la variación de la frecuencia de excitación y el eje horizontal el espectro de frecuencia de la señal del acelerómetro. Es claro ver dos picos de frecuencia alrededor de los 2.7 Hz, pero el pico inferior (rampa ascendente) es más alto y ancho que el pico que se observa en la parte superior de la gráfica. La diferencia de estas amplitudes de frecuencia es del 70% y el rango de frecuencia varía de 4 a 6 Hz, con lo que se puede concluir que sí existe el fenómeno de salto.

### CONCLUSIONES

La identificación de los efectos no lineales en estructuras esbeltas no es simple, requiere de un análisis minucioso y tener claro el comportamiento esperado. El conocimiento teórico del fenómeno permite pronosticar las condiciones en las que éste se manifiesta, que no suelen ser triviales. Una vez que se han caracterizado las condiciones en las que se presentarán las vibraciones no lineales, se debe también conocer la forma en la que éstas se presentarán.

En este trabajo se ha demostrado que un modelo simplificado de una viga en voladizo es suficiente para pronosticar las condiciones en las que se presentan las vibraciones no lineales. Este modelo tiene una característica similar a la ecuación de Duffing con términos de tercero y quinto orden. Con este modelo se comprobó que una de las características típicas es la distorsión armónica entre la forma de la función de excitación y la respuesta.

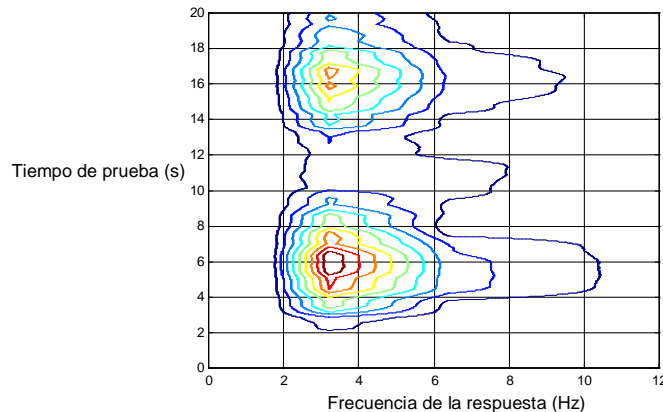


Figura 14. Diagrama tiempo-frecuencia. Rampa de excitación.

Por último, después de revisar diferentes maneras de analizar los datos experimentales, se concluyó que la mejor manera de identificar el comportamiento no lineal es empleando los diagramas de fase. Más aún, este método se puede implementar analógicamente y producir directamente el diagrama para evitar que la integración en el dominio de la frecuencia elimine los efectos no lineales

#### REFERENCIAS

- [1] S. Y. Oh, O. Song and L. Librescu, Effects of pretwist and presetting on coupled bending vibrations of rotating thin-walled composite beams, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 40-5, 1203-1224, 2003.
- [2] M. Sabuncu and K. Evran, The dynamic stability of a rotating pre-twisted asymmetric cross-section Timoshenko beam subjected to lateral parametric excitation, *Int. Journal of Mechanical Sciences* Vol. 48-8, 878-888, 2006.
- [3] S. M. Lin, W. R. Wang and S. Y. Lee, The dynamic analysis of nonuniformly pretwisted Timoshenko beams with elastic boundary conditions, *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 43-10, 2385-2405, 2001.
- [4] J. R. Banerjee, Development of an exact dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of a twisted Timoshenko beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 270,1-2, 379-401, 2004.
- [5] J. Jáuregui, O. González, Nonlinear vibrations of cantilever beams, *Proceedings of Mechanics of Slender Structure Moss 2008*, U. Baltimore, 2008.
- [6] M. B. Cornila, L. Capolungoa, J. Qua and V. A. Jairazbhoyb, Free vibration of a beam subjected to large static deflection, *Journal of Sound and Vibration* Vol. 303, 3-5, 723-740, 2007.
- [7] L. Q. Chen and W. J. Zhao, A conserved quantity and the stability of axially moving nonlinear beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 286-3, 663-668, 2005.
- [8] B. N. Nbenjjo and P. Woafu, Active control with delay of horseshoes chaos using piezoelectric absorber on a buckled beam under parametric excitation, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 32-1, 73-79, 2007.
- [9] O. N. Ashour, A. H. Nayfeh, Experimental and numerical analysis of a nonlinear vibration absorber for the control of plate vibrations, *Journal of Vibration and Control*, Vol 9, 209-234, 2003.
- [10] Vela, L., Jauregui, J., Rubio, E., Herrera, G., Lozano, A., Analysis of compliance between the cutting tool and the workpiece on the stability of a turning process, *Intl J. of Machine Tools & Manufacture* 48, 1054-1062, 2008.
- [11] B. Balachabdran, Dynamics of an elastic structure excited by harmonic and aharmonic impactor motions, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 9, 265-279, 2003.
- [12] T.H. Young, T.C. Tseng, L. S. Song, Dynamic stability of fluttered systems subjected to parametric random excitations, *Journal of Vibration and Control*, Vol 8, 291-310, 2002.
- [13] Nayfeh, A., Mook, D, *Nonlinear Oscillations*, John Willey & Sons, EUA, 1979
- [14] Jáuregui, J. C., Urbiola, L., Diaz, C. L., and Aboites, F., Modelado multidimensional de sistemas viscoelásticos, *Ingeniería Mecánica Tecnología y Desarrollo*, Vol 2 (1), 6-12, 2005.