

## FRICCIÓN, CORRECCIÓN DEL DENTADO Y CONCENTRACIÓN DE TENSIONES EN ENGRANAJES

M.Sc. Aisman Quiñones Cherta , Dr. Rafael Goytisoló Espinosa  
Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad de Cienfuegos,  
Carretera a Rodas km 4, Cuatro Caminos, Cienfuegos, Cuba  
aquinones@ucf.edu.cu, ragoyti@ucf.edu.cu

Dr. Jorge Moya Rodríguez  
Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Central de las Villas  
Carretera a Camajuani km 8, Santa Clara, Villa Clara, Cuba  
jorgemr@uclv.edu.cu

### RESUMEN

Sobre la base de un nuevo modelo para el cálculo del Factor de Forma en engranajes cilíndricos de dientes rectos que toma en cuenta la variación de los coeficientes de corrección y de fricción, se establece una nueva expresión para el cálculo del Coeficiente de Concentración de Tensiones (CCT) que depende del número de dientes, el coeficiente de corrección y de los parámetros geométricos de la herramienta de corte. La expresión es obtenida por medio de la Regresión Lineal Múltiple, tomando como tensión máxima la obtenida por el MEF; y nominal, la obtenida por el nuevo modelo.

### ABSTRACT

In this paper on the base of the a new model for the calculation of the Form Factor in the teeth of spur gear that takes into account the variation of the correction coefficients and of friction coefficients, a new expression settles down for the calculation of the Coefficient of Concentration of Tensions (CCT) that depends of the number of teeth, the correction coefficient and of the geometric parameters of the court tool. The expression is obtained by means of the Multiple Lineal Regression, taking as maximum tension the one obtained by the MEF; and nominal, the obtained by the new model.

### NOMENCLATURA

k Coeficiente de concentración de tensiones

%ER Error relativo

S<sub>p</sub> – Valor patrón para el cálculo del error, para el caso analizado será  $\sigma_{MEF}$ ,

S – Valor a ser comparado con el patrón.

$\xi$  – Coeficiente de corrección del dentado.

Z – Número de dientes

k<sub>c</sub> – coeficiente de concentración de tensiones en el pie con corrección del dentado.

k <sub>$\sigma$</sub>  – coeficiente de concentración de tensiones en el pie sin corrección del dentado

$\sigma_{Asc}$  - Tensión analítica sin tomar en cuenta la CT,

Mt- Momento torsor correspondiente a la rueda conductora,

b- Ancho del Engranaje,

m- Módulo,

Z<sub>p</sub>- # de dientes del piñón,

y- Factor de Forma

$\sigma_{Asc}$  - Tensión analítica sin tomar en cuenta la CT,

**INTRODUCCIÓN**

La fractura de los dientes de engranajes, es producida en general, por la fatiga que tiene lugar en su base (raíz o pie) a causa de las tensiones variables de flexión surgidas por las cargas cíclicas que se originan en cada entrada sucesiva del diente en engrane. Se agrega un cambio brusco de la forma del diente (de Evolvente a Trocoide) en la zona de la curva de transición donde tienen lugar concentraciones de tensiones [1] (Fig. 1 a). La Concentración de Tensiones no es más que el incremento local de las tensiones en los elementos, determinado por el cambio brusco de las secciones transversales los cuales tienen lugar a causa de orificios, ranuras, cortes, etc., llamados concentradores. La concentración de tensiones es caracterizada por el Coeficiente de Concentración de Tensiones que no es más que la razón entre la Tensión Local Máxima y el valor de la Tensión Nominal [2] (Fig. 1 b).

$$k = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_n} \tag{1}$$

Varios autores han trabajado en el esclarecimiento de este fenómeno para el caso de los dientes de engranajes. Uno de los procedimientos más antiguos, pero muy ilustrativos lo constituye la construcción de un modelo físico de engranajes de un material foto-elástico traslúcido para luego obtener la visualización del estado tensional por el método óptico polarizado.

En la Fig. 2 a) se muestra este procedimiento. La separación de las franjas oscuras de interferencia adyacentes corresponde a un incremento de las tensiones. En las zonas donde existe una alta densidad de las franjas oscuras de interferencia se encontrará la mayor concentración de tensiones. En este experimento se demuestra fácilmente que, fuera de la zona de contacto, las zonas de mayor concentración de tensiones se encuentran precisamente en el pie del diente. Bajo un determinado número de ciclos de carga, en la zona de máxima concentración de tensiones, es muy probable el surgimiento de una grieta formándose en la zona de tracción "A" (lado de aplicación de la carga), Fig. 2 b), a causa de defectos superficiales, calidad de fabricación, imprecisiones de cálculo o alteraciones del régimen normal de operación. Esta grieta puede propagarse transversalmente a lo largo del diente hasta llegar a la zona de tensiones mayores de compresión, donde la concentración de tensiones agudiza aun más la falla [3].

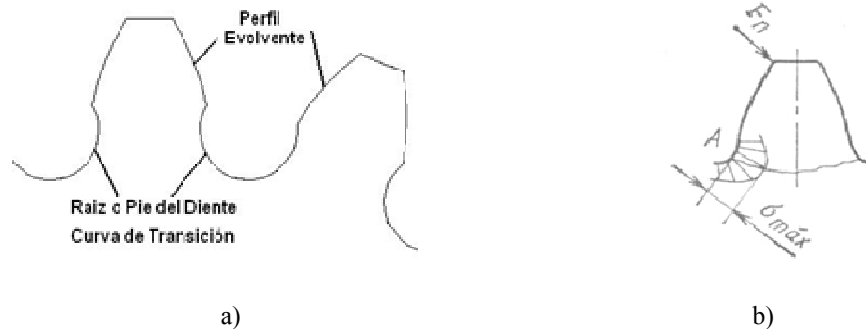


Fig. 1-a) Porción de Engrane de 17 dientes sin corrección apreciándose claramente las curvas que forman el diente donde se encuentra el concentrador de tensiones. b) Incremento local de tensiones que tiene lugar en el pie del diente a causa de la brusca transición.

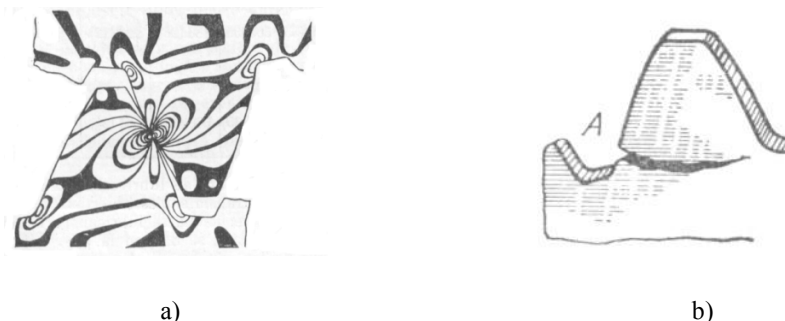


Fig. 2-a) Modelo Físico de engranajes de material foto-elástico traslúcido para la visualización del estado tensional por el método óptico polarizado. b) Propagación transversal de una grieta provocando la fractura por fatiga.

En los dientes de engranajes la concentración de tensiones está completamente determinada por la forma del diente, el material de fabricación y el acabado de la superficie de la curva de transición en el pie. La resistencia a la fractura por fatiga de los dientes de engranajes se puede aumentar considerablemente haciendo más firme la base del diente y disminuyendo la concentración de tensiones con el aumento del radio de curvatura de la superficie de transición. Además un acabado minucioso de la superficie de transición y la elevación de la rigidez con el aumento de la exactitud de fabricación, y la elevación de las propiedades mecánicas del material de las ruedas [3]. La forma del diente juega un papel fundamental a la hora de establecer el coeficiente de concentración de tensiones en el pie del diente. En [4] es obtenido un nuevo modelo matemático para el cálculo del factor de forma que toma en cuenta la variación de los coeficientes de corrección y fricción y además el efecto favorable de la componente radial de la carga total aplicada en el vértice del diente. Este modelo queda establecido por las siguientes expresiones:

$$\text{inv}\alpha_e = \tan \left[ \cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2} \right] - \left[ \cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 1} \right] \quad (2)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\pi + 4 \cdot \xi \cdot \tan \alpha}{4 \cdot Z} + \frac{\text{inv}\alpha}{2} - \frac{\text{inv}\alpha_e}{2} \right) \quad (3)$$

$$\delta = \cos^{-1} \left[ \cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2} \right] + 2 \cdot \theta - 180^\circ \pm \tan^{-1} f \quad (4)$$

$$h/m = 2.25 - c - \left( \frac{Z}{2} + \xi + 1 \right) \cdot \left[ 1 - \frac{\text{sen} \cdot (\theta - \delta)}{\text{sen} \cdot (\theta + \delta)} \right] \quad (5)$$

$$\text{inv}\alpha_n = \tan \left[ \cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.25} \right] - \left[ \cos^{-1} \frac{Z \cdot \cos \alpha}{Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.25} \right] \quad (6)$$

$$S/m = (Z + 2 \cdot \xi + 2 \cdot c - 2.5) \cdot \left[ \frac{\pi + 4 \cdot \xi \cdot \tan \alpha}{2 \cdot Z} + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_n \right] \quad (7)$$

$$\frac{1}{y} = \left[ \frac{6 \cdot \cos \delta \cdot (h/m)}{\cos \rho \cdot (s/m)^2} - \frac{\text{sen} \delta}{\cos \rho \cdot (s/m)} \right] \quad (8)$$

$$\cos \rho = \sqrt{\frac{1}{1 + f^2}} \quad (9)$$

Las restricciones del Nuevo Modelo Elaborado se exponen a continuación:

1. El Coeficiente de Corrección mínimo para estas nuevas condiciones se obtiene de la siguiente expresión:

$$1.- \text{inv}\alpha_n \geq 0 \Rightarrow \xi_{\min} = 1.25 - c - \frac{Z}{2} \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (10)$$

2. De la condición  $S_e \geq 0.25 \cdot m$  se obtiene que:

$$2.- \theta < \arccos \left( \frac{1}{8 \cdot (Z + 2 \cdot \xi + 2)} \right) \quad (11)$$

3. El ángulo de fricción debe encontrarse dentro de los siguientes límites:

$$3.- 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{5} \quad (12)$$

4. Por último el Coeficiente de Recubrimiento debe mantenerse en los límites conocidos:

$$4.- \varepsilon \geq 1.3 \quad (13)$$

Con este nuevo modelo queda establecida la influencia que tienen los coeficientes de corrección y de fricción en el factor de forma de los engranajes.

En la Fig. 3 se muestran dos gráficos para el cálculo del factor de forma con un valor práctico extraordinario obtenidos en [4]. Con respecto a la validación de este nuevo modelo fueron realizadas comprobaciones empleando el Método de los Elementos Finitos como herramienta computacional para dar solución al estado tensional y deformacional que surge en el diente a causa de carga. Se realizaron los cálculos de las tensiones volumétricas en el pie del diente por las Normas Internacionales más prestigiosas en el cálculo de engranajes como lo son la AGMA, la ISO, la DIN y la GOST, y por el nuevo modelo elaborado (2-13) empleando los coeficientes de concentración de tensiones de Dobrovolski, 1970 y de Dolan-Brogamer, 1942. Los valores obtenidos fueron comparados con los resultados del MEF para los modelos construidos mediante un software CAD. Para presentar los resultados y compararlos se construyeron 7 gráficos presentados en la Figura 4, cada uno de los cuales consta de 6 curvas que representan los valores de las tensiones obtenidas, en primer lugar por el MEF, luego por las Normas antes mencionadas (se unen ISO y DIN) y finalmente por el nuevo método tomando en cuenta los coeficientes de concentración de tensiones antes mencionados.

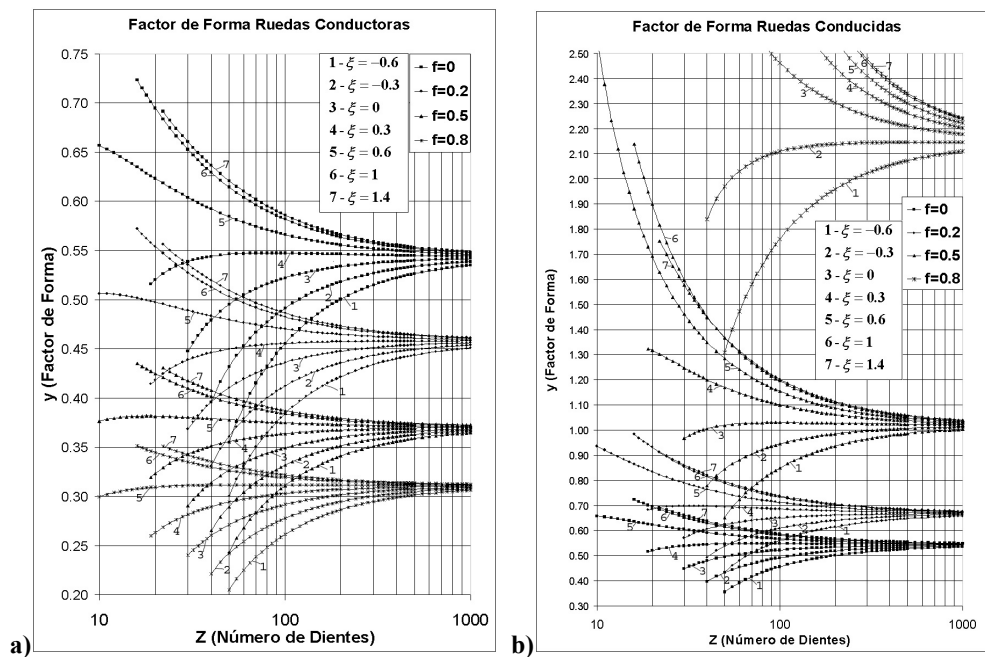
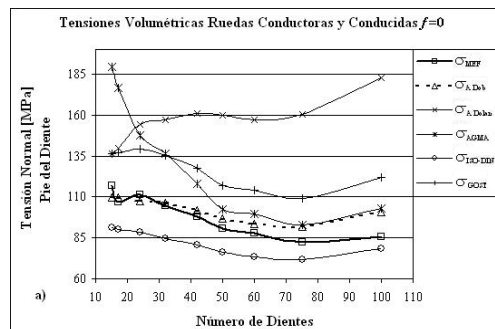


Fig. 3- Valores del Factor de Forma para las Ruedas Conductoras y Conducidas para diferentes coeficientes de fricción y de corrección del dentado



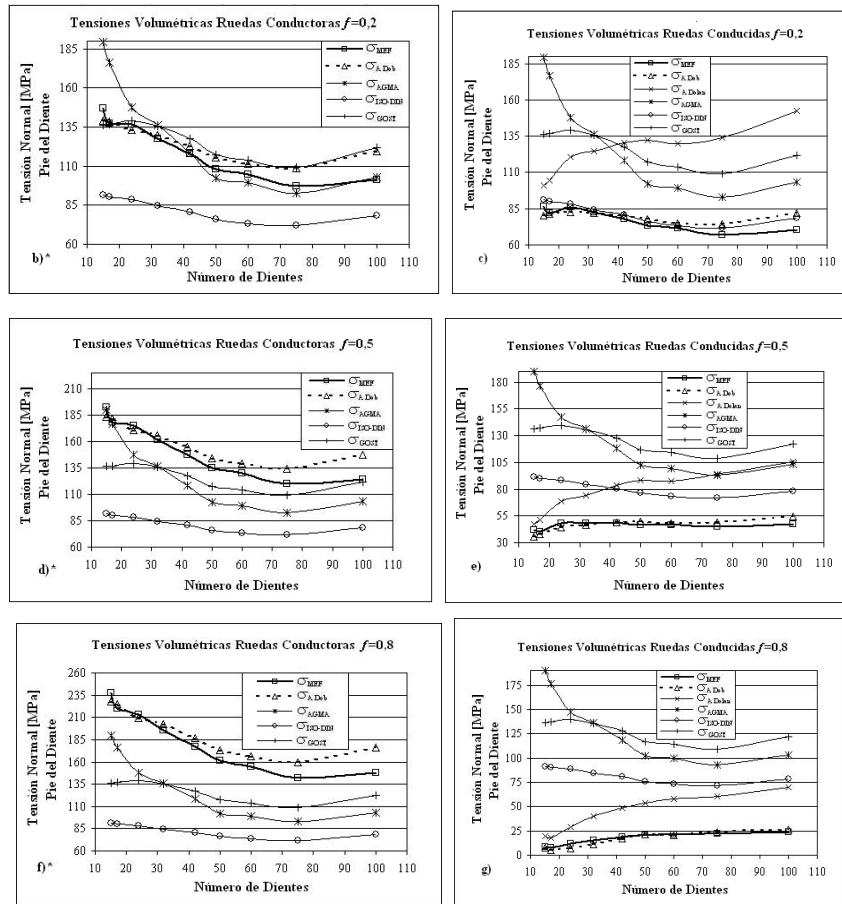


Fig. 4. Gráficos Comparativos donde se representan los valores de las tensiones obtenidas por el Método de los Elementos Finitos con el Modelo Elaborado, que toma en cuenta los Coeficientes de Concentración de Tensiones dados por Dobrovolski [5] y Dolan-Broghamer [6], y los valores de tensiones obtenidos para las mismas condiciones por las Normas AGMA, ISO-DIN y GOST. Nota: En los gráficos marcados con (\*) fue omitida la curva que representan los valores de las tensiones calculadas por el modelo elaborado utilizando el CCT de Dolan-Broghamer.

Como se puede apreciar en los gráficos existe una buena aproximación de los valores obtenidos por el nuevo modelo, utilizando en coeficiente de concentración de tensiones de Dobrovolski, 1970 ( $\sigma_{A\text{ Dob}}$ ), comparándolos con los valores que resultan del MEF ( $\sigma_{MEF}$ ). Para comparar estos resultados se empleó el criterio del Error Relativo:

$$\%ER = \left| \frac{S_P - S}{S_P} \right| \cdot 100 \quad (14)$$

Para el caso mencionado los valores del error relativo promedio, tanto para ruedas conductoras como conducidas y la variación del coeficiente de fricción, quedan por debajo del 10%. Para el resto de los casos el error queda por encima del 20%, lo que se puede apreciar gráficamente (Fig. 4).

El presente trabajo tiene como objetivo fundamental: Desarrollar una expresión para el cálculo del Coeficiente de Concentración de Tensiones que tome en cuenta el Factor de Forma obtenido por el nuevo modelo y ajuste mejor los valores del modelo elaborado a los resultados del MEF.

## DESARROLLO

**Análisis de los coeficientes de concentración de tensiones encontrados en la bibliografía. Coeficiente de Concentración de Tensiones dado por Dobrovolski.**

Según *Dobrovolski, 1970* [5] el coeficiente de concentración de tensiones ( $k_\sigma$ ) en la raíz del diente depende del número de dientes, de los parámetros del perfil que genera y de la corrección, pues estos influyen directamente en el redondeo del pie del diente. También depende del material utilizado y de la calidad de la superficie. Para ruedas dentadas de Acero Normalizadas y templadas y con un radio de redondeo del pie igual a  $0.4 \cdot m$  se tiene que:

$$k_\sigma = k'_\sigma + \xi \cdot \frac{1.54 - k'_\sigma}{0.6} \quad (15)$$

Donde el coeficiente  $k'_\sigma$  es el propio coeficiente de concentración de tensiones para ruedas normales (no corregidas), [5] consta de una tabla mostrada en la Tabla 1. Con ayuda del Software Curve Expert 1.3 se encontró que la Línea de Tendencia que más se aproxima a estos valores es una Exponencial Modificada cuya expresión es:

$$k'_\sigma = \frac{3 \cdot e^{-\frac{3.8}{Z}}}{2} \quad (16)$$

Tabla 1. Valores de  $k'_\sigma$  en función del número de dientes.

Z	$K'_\sigma$
$\leq 20$	1.24
30	1.34
40	1.37
60	1.41
$\geq 100$	1.45

Se destaca que el coeficiente de correlación para este ajuste es:  $r = 0.996$ . Luego de realizar las simplificaciones necesarias sustituyendo (16) en (15), con ayuda del Software Matemática 5.0, se obtiene como expresión general del coeficiente de concentración de tensiones la siguiente:

$$k_\sigma = 2.57 \cdot \xi + (1.5 - 2.505 \cdot \xi) \cdot e^{-\frac{3.8}{Z}} \quad (17)$$

Finalmente la expresión analítica ajustada del coeficiente de concentración de tensiones puede tomarse como una función definida a intervalos de la forma:

$$k_\sigma = \begin{cases} 1.24 + 0.5 \cdot \xi & ; Z < 20 \\ 2.57 \cdot \xi + (1.5 - 2.505 \cdot \xi) \cdot e^{-\frac{3.8}{Z}} & ; 20 \leq Z \leq 100 \\ 1.45 + 0.15 \cdot \xi & ; Z > 100 \end{cases} \quad (18)$$

#### Coefficiente de Concentración de Tensiones de Dolan-Broghamer.

El desarrollo de una investigación foto-elástica realizada por *Dolan y Broghamer, 1942* [6, 7] estableció la siguiente expresión para dientes de engranajes cilíndricos de evolvente y  $20^\circ$  de ángulo del perfil de referencia:

$$K_t = H + \left(\frac{t}{r}\right)^L + \left(\frac{t}{l}\right)^M \quad (19)$$

Donde:

$$H = 0.34 - 0.4583662 \cdot \alpha$$

$$L = 0.316 - 0.4583662 \cdot \alpha$$

$$M = 0.29 + 0.4583662 \cdot \alpha$$

$t = S_n$  – Espesor del diente en el pie.

$$r = \frac{r_f^2 + (b - r_f)^2}{d/2 + b - r_f}$$

$r_f = 0.4 \cdot m$  - Radio de redondeo del pie del diente.

$d = m \cdot Z$  - Diámetro primitivo.

$b = 1.25 \cdot m$  - Altura del pie del diente (dedendum)

$l = h$  - Altura medida desde el punto de aplicación de la fuerza en el eje de simetría del diente hasta donde es medido el espesor del pie del diente.

$\alpha$  - Angulo del perfil de referencia  $20^\circ$ .

Los coeficientes  $H$ ,  $L$  y  $M$  toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} H &= 0.18 \\ L &= 0.156, \text{ para } \alpha = 20^\circ \\ M &= 0.45 \end{aligned}$$

El espesor  $t$  se calcula multiplicando el valor del módulo ( $m$ ) por la expresión (7) del modelo elaborado:

$$t = m \cdot \left( \frac{S}{m} \right) \quad (20)$$

La altura  $h$  se calcula de igual forma, multiplicando el valor del módulo por la expresión (5):

$$l = m \cdot \left( \frac{h}{m} \right) \quad (21)$$

La expresión (19) queda de la forma:

$$K_t = 0.18 + \left( \frac{\left( \frac{S}{m} \right)}{r} \right)^{0.156} + \left( \frac{\left( \frac{S}{m} \right)}{\left( \frac{h}{m} \right)} \right)^{0.45} \quad (22)$$

Se observa en esta última expresión que el coeficiente de concentración de tensiones de Dolan-Broghamer no depende del módulo sino que depende del número de dientes, de la corrección y de las características del perfil generador ( $\alpha = 20^\circ$ ,  $c_f = 0.4$ ).

#### Otros Coeficientes de Concentración de Tensiones encontrados en la Literatura para Dientes de Engranajes.

Anteriormente fueron presentados los Coeficientes de Concentración de Tensiones (CCT) encontrados en la literatura que toman en cuenta las condiciones de carga en la punta del diente y que toman en cuenta el coeficiente de corrección, de acuerdo al enfoque de nuestro trabajo. Además de los CCT antes mencionados se encuentran otros [8, 9] que aunque no cumplen con los requisitos antes mencionados, vale la pena comentarlos.

*Burdon, 1964* en su artículo presentado por [9] muestra de forma gráfica valores del CCT para engranajes de evolvente con  $\alpha = 20^\circ$  en función de la relación altura-espesor y del radio de redondeo de la punta de la herramienta que genera el diente. La limitante fundamental es que toma como punto de aplicación de la carga la circunferencia primitiva.

Por otra parte *Pisarenko, 1979* presenta en su manual [8] una gráfica para calcular el Coeficiente Teórico de Concentración de Tensiones y otra para calcular el coeficiente de sensibilidad a la concentración de tensiones; para piñones no corregidos de perfil de evolvente con  $\alpha = 20^\circ$ , número de dientes entre 20 y 80 y carga aplicada en la cabeza del diente. El gráfico para el coeficiente teórico de CT depende de las relaciones espesor con altura y radio de redondeo de la cabeza con módulo. Mientras que el gráfico del coeficiente de sensibilidad a la CT depende del radio de redondeo de la cabeza y del tipo de acero con que se trabaje, específicamente de la relación entre límite de fluencia y límite de proporcionalidad.

#### Nueva expresión para el cálculo del coeficiente de concentración de tensiones en dientes de engranajes.

Como se mencionó anteriormente y luego de apreciar los gráficos de la Fig. 4 es necesario encontrar una nueva expresión para el Coeficientes de Concentración de Tensiones (CCT) que ajuste mejor las tensiones calculadas analíticamente por el nuevo modelo elaborado para el cálculo del factor de forma con las tensiones obtenidas por el MEF. Primeramente se construyen los Gráficos de las Figs. 5 y 6 para el CCT de Dobrovolski y el de Dolan-Broghamer respectivamente, donde se plotean los valores del CCT en función del número de dientes y se obtienen distintas curvas para los diferentes coeficientes de corrección

En ambos casos se muestra una tendencia al aumento del CCT a medida que aumenta el número de dientes, con la cual no se han obtenidos buenos resultados para números de dientes mayores de 70. Para dar solución a este problema presentado con el CCT se construyen un total de 30 modelos de engranajes en el sistema CAD (Mechanical Desktop 6.0) para su posterior análisis por el MEF. En la Tabla 2 se muestran los números de dientes con los correspondientes valores del coeficiente de corrección. Para estos modelos son calculadas las tensiones volumétricas en el pie del diente tanto de forma analítica (23), como por el MEF con ayuda del Software COSMOS Design Start 4.0. El CCT es calculado mediante la expresión (1) tomando como valores de tensión máxima los obtenidos por el MEF y los nominales los calculados (Ecuación 24).

$$\sigma_{Asc} = \frac{2 \cdot M_{tp}}{b \cdot m^2 \cdot Z_p \cdot y \cdot \cos \alpha} \quad (23)$$

$$k_{\sigma_{MEF}} = \frac{\sigma_{MEF}}{\sigma_{Asc}} \quad (24)$$

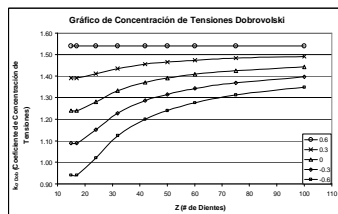


Fig. 5 Gráfico de Concentración de Tensiones dado por *Dobrovolski, 1970*; obtenidos por la expresión (18).

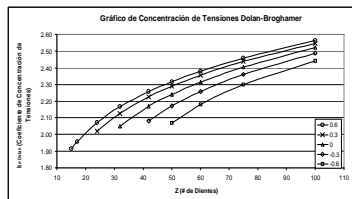


Fig. 6 Gráfico de Concentración de Tensiones obtenido por *Dolan-Brogamer, 1942* y dado por [6]; obtenidos por la

Tabla 2. Número de dientes con sus respectivos coeficientes de corrección para un total de 30 modelos.

Z	15	17	24	32	42
$\xi$	0.6	0.6	0.3, 0.6	0, 0.3, 0.6	-0.3, 0, 0.3, 0.6
Z	50	60	75	100	
$\xi$	-0.6, -0.3, 0, 0.3, 0.6	-0.6, -0.3, 0, 0.3, 0.6	-0.6, -0.3, 0, 0.3, 0.6	-0.6, -0.3, 0, 0.3	

#### Modelo MEF de un Engranaje para el cálculo de tensiones en el pie del diente.

Como fue establecido en [4] el Modelo de un engranaje para su análisis en un software de elementos finitos es aquella porción del mismo que conste de tres dientes contiguos y cortado por los planos de simetría de los valles de los dientes exteriores, con un diámetro del núcleo o agujero central de una décima parte de su diámetro primitivo. De esta forma el diente a analizar en el modelo será el central como se aprecia en la Fig. 7 b). Las condiciones de contorno, restricciones y cargas también serán las mismas, como se aprecia en la Fig. 7 b). La malla del modelo se realiza de tal manera que en la zona de concentración de tensiones el tamaño de los elementos sea menor. Se realiza el estudio en el COSMOS Design Start 4.0 utilizando un tipo de Análisis Estático, en otras palabras un análisis Lineal - Elástico para materiales Isotrópicos. Los valores de tensiones fueron obtenidos por el criterio de resistencia de Huber-Mises-Hencky. Los valores de tensión se buscan en el pie del diente en la zona del concentrador de tensiones donde aparece tracción producto a la combinación de las tensiones de flexión y de compresión (Zona circular en rojo, Fig. 8 b)



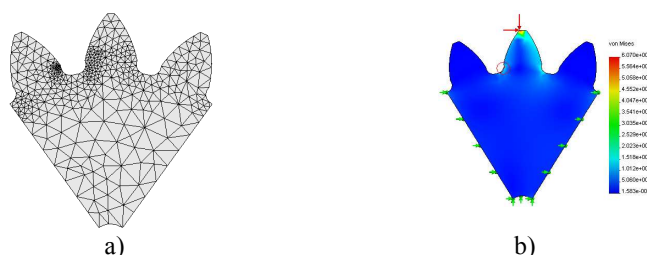


Fig. 7. a) Mallado realizado por el COSMOS Design Start 4.0, b) Cálculo de Tensiones por el MEF, para un análisis Estático Nodal de Tensiones por la 4ª Teoría de Resistencia de Hubber-Von Mises-Hencky.

Las condiciones de contorno, restricciones y cargas también serán las mismas, como se aprecia en la Fig. 7 b). La malla del modelo se realiza de tal manera que en la zona de concentración de tensiones el tamaño de los elementos sea menor. Se realiza el estudio en el COSMOS Design Start 4.0 utilizando un tipo de Análisis Estático, en otras palabras un análisis Lineal - Elástico para materiales Isotrópicos. Los valores de tensiones fueron obtenidos por el criterio de resistencia de Huber-Mises-Hencky. Los valores de tensión se buscan en el pie del diente en la zona del concentrador de tensiones donde aparece tracción producto a la combinación de las tensiones de flexión y de compresión (Zona circulada en rojo, Fig. 8 b) Analizando los valores obtenidos del CCT y realizando un análisis de Regresión Lineal Múltiple tomando como variable dependiente el CCT ( $k_{\sigma_{MEF}}$ ) y como independientes el número de dientes ( $Z$ ) y el coeficiente de corrección ( $\zeta$ ); con ayuda del SPSS 11.0 para Windows se obtiene la siguiente expresión con un coeficiente de correlación  $R^2=0.847$  con buen nivel de significación y representatividad de las variables independientes sobre la dependiente:

$$k_{\sigma_{MEF}} = 1.497 + 0.126\zeta - 0.00393Z \quad (25)$$

Otro elemento importante que da validez a la expresión es la distribución de los errores, que para este caso siguen una Distribución Normal con una desviación estándar de 0.96. Con la expresión (25) son calculados nuevamente los valores del error obteniendo magníficos resultados tanto para Ruedas Conductoras como para las Conducidas.

En Ruedas Conductoras,

Para $f=0$ :	$\%E_{RA_{MEF}}=3.48$ (de $\%E_{RA_{DOB}}=6.60$ )
Para $f=0.2$ :	$\%E_{RA_{MEF}}=3.32$ (de $\%E_{RA_{DOB}}=6.54$ )
Para $f=0.5$ :	$\%E_{RA_{MEF}}=3.13$ (de $\%E_{RA_{DOB}}=6.81$ )
Para $f=0.8$ :	$\%E_{RA_{MEF}}=3.12$ (de $\%E_{RA_{DOB}}=6.99$ )

En Ruedas Conducidas,

Para $f=0$ :	$\%E_{RA_{MEF}}=3.48$ (de $\%E_{RA_{DOB}}=6.60$ )
Para $f=0.2$ :	$\%E_{RA_{MEF}}=4.22$ (de $\%E_{RA_{DOB}}=6.22$ )
Para $f=0.5$ :	$\%E_{RA_{MEF}}=6.79$ (de $\%E_{RA_{DOB}}=7.43$ )
Para $f=0.8$ :	$\%E_{RA_{MEF}}=19.60$ (de $\%E_{RA_{DOB}}=16.89$ )

Como se muestra los errores para las Ruedas Conductoras disminuyen a menos del 5%, de la misma forma ocurre para las Ruedas Conducidas sólo para coeficientes de fricción es mayor que 0.2 donde el error es mayor.

Son representados los resultados gráficamente (de forma similar a la Fig. 4) en la Fig. 8. Como se puede observar, con la nueva expresión para el cálculo del CCT se obtiene un mejor ajuste de los valores obtenidos por el MEF a los valores de tensiones obtenidos por el nuevo modelo elaborado en [4].

## CONCLUSIONES

Sobre la base de los resultados obtenidos con la nueva expresión para el cálculo del Coeficiente de Concentración de Tensiones, se pueden formular las siguientes conclusiones:

- Se realizó un análisis de Regresión Lineal Múltiple tomando como variable dependiente el Factor de Concentración de Tensiones ( $k_{\sigma_{MEF}}$ ) calculado como el cociente entre la tensión equivalente real en el pie calculada por el MEF y la tensión analítica calculada por el Método Elaborado sin tomar en cuenta el Coeficiente de Concentración de Tensiones, y como variables independientes el número de dientes ( $Z$ ) y el coeficiente de corrección ( $\zeta$ ) con ayuda del SPSS 11.0 para Windows, obteniéndose, la siguiente expresión:

$$k_{\sigma_{MEF}} = 1.497 + 0.126\zeta - 0.00393Z$$

- Los % de errores relativos medios para toda la gama de número de dientes, coeficientes de fricción y coeficientes de corrección del dentado para las Ruedas Conductoras se reducen a valores inferiores al 4%. Para las Ruedas Conducidas dan inferiores a 7%, sólo con  $f=0.8$  los errores son mayores que el obtenido con el  $k_{\sigma}$  de Dobrovolski.

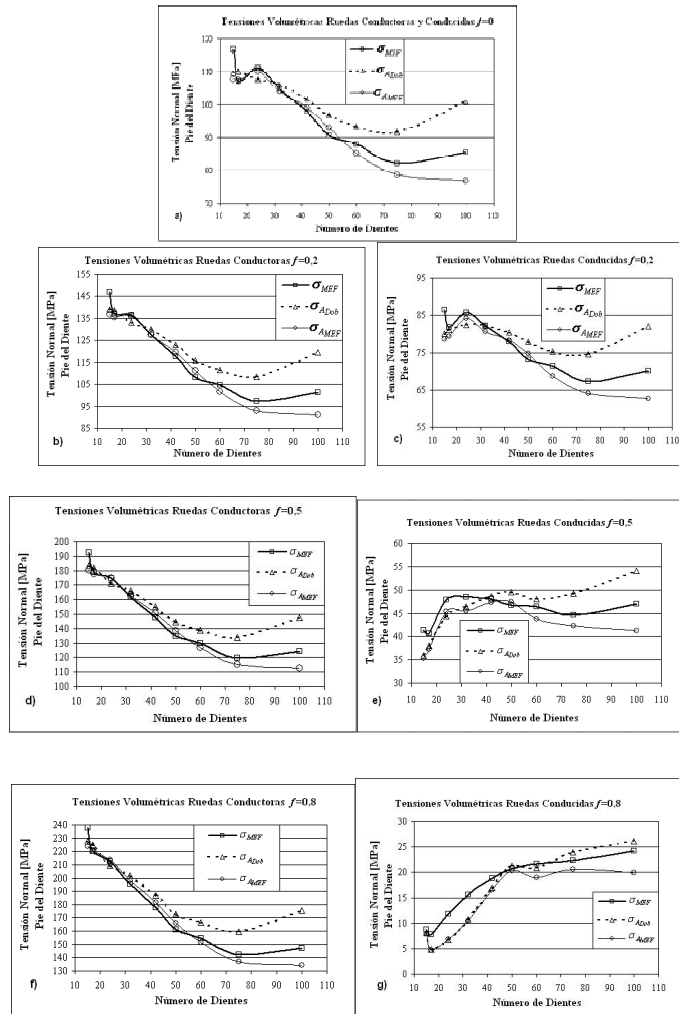


Fig- 8. Gráficos comparativos donde se representan los valores de las tensiones obtenidas por el MEF con el Nuevo Modelo Elaborado [4], que toma en cuenta los Coeficientes de Concentración de Tensiones dados por Dobrovolski [5], y los valores de tensiones obtenidas para el Nuevo Modelo Elaborado [4] con el CCT calculado por (25).

## REFERENCIAS

1. Zablonski, K. Elementos de Máquinas. Moscú: Editorial MIR, 1980.—p. 260.
2. Pisarenko, G.S. Manual de Resistencia de Materiales/ G. S. Pisarenko, A. P. Yakovlev y V. K. Matveev.-- Moscú: Editorial MIR, 1989. —p. 150.
3. Dobrovolski, V. Elementos de Máquinas. Moscú: Editorial MIR, 1970.—p. 284.
4. Quiñones Ch., A. Nuevo Modelo Matemático para el cálculo del Factor de Forma en engranajes de evolvente cilíndricos de dientes rectos y su validación por el Método de los Elementos Finitos./ Aisman Quiñones Cherta; R. Goytisolo Espinosa, tutor.--Tesis Maestría.--Universidad Cienfuegos, 2004.
5. Dobrovolski, V. Elementos de Máquinas. Moscú: Editorial MIR, 1970.—p. 330.
6. Shigley, J.E y Mischkie, C. Diseño en Ingeniería Mecánica. México: Editorial McGraw Hill Interamericana. 2001. —943 p.
7. Faires, V.M. / Diseño de Elementos de Máquinas. México: Editorial UTEHA, 1985. —802 p.
8. Pisarenko, G.S. Manual de Resistencia de Materiales/ G. S. Pisarenko, A. P. Yakovlev y V. K. Matveev.-- Moscú: Editorial MIR, 1989. —p. 660.
9. Roylance, T.F. Engineering Desing/ T. F. Roylance. Great Britain: Pergamon Press, 1966.—p. 146-149.