

VELOCIDAD UMBRAL DE ESTABILIDAD Y FRECUENCIA DE VIBRACIÓN EN UN SISTEMA ROTOR-CHUMACERAS CON DESALINEAMIENTO.

Antonio-García, Alberto., Linares-Flores, Jesús., Miranda-Luna, Rosebet.
Instituto de Electrónica y Computación. Universidad Tecnológica de la Mixteca
Huajuapán de León, Oaxaca, México, CP 69000
e-mail: agarcia@mixteco.utm.mx, albertoag@mexico.com, Tel: (953) 53 202 14, ext. 200

RESUMEN

En este trabajo se presenta como se comporta *la estabilidad* de un sistema rotor-chumaceras cuando el muñón se encuentra en una posición desalineada. Se modifica la expresión del espesor de película por medio de dos ángulos que permiten modelar el desalineamiento y usar el método de pequeñas perturbaciones para resolver la ecuación de Reynolds y obtener los coeficientes rotodinámicos de rigidez y de amortiguamiento. Se obtienen 32 coeficientes rotodinámicos (16 de rigidez y 16 de amortiguamiento), los cuales son el producto tanto de fuerzas como de momentos hidrodinámicos. Utilizando estos 32 coeficientes junto con un modelo de Jeffcott de eje flexible se investiga como se ve afectada *la velocidad umbral de estabilidad y la frecuencia de vibración* para diferentes grados de desalineamiento.

ABSTRACT

In this work, the behavior of *the stability* in a rotor bearing system is presented when the journal is in a misaligned position. The fluid film thickness of the bearing is modified by mean of two angles that permit model the misalignment and use the perturbation method to solve the Reynolds equation to get the stiffness and damping coefficients. 32 rotordynamics coefficients are obtained (16 stiffness and 16 damping coefficients) that are the result of the hydrodynamic forces and moments. This 32 bearing coefficients are used with a Jeffcott flexible model shaft to investigate how the *threshold speed and the frequency of vibration* is affected for different degrees of misalignment.

Palabras clave: Coeficientes rotodinámicos, velocidad umbral de estabilidad, frecuencia de vibración.

NOMENCLATURA

| | |
|-----------|--|
| a | desbalance residual, m |
| c_{ij} | coeficientes de amortiguamiento, $i,j=x,y$, N.s/m |
| F_i | fuerzas hidrodinámicas, $i=x,y$, N |
| k_{eje} | rigides del eje, N/m |
| k_{ij} | coeficientes de rigidez, $i,j=x,y$, N/m |
| m | masa del rotor, kg |
| M_i | momentos hidrodinámicos, $i=x,y$, N.m |
| C | claro radial, m |
| H | espesor de la película del lubricante, m |
| h | espesor de película adimensional, $h=H/C$ |
| e | excentricidad, m |
| E | Modulo de young, N/m ² |
| L | longitud de la chumacera, m |
| N | velocidad de operación, rev/s |
| P | presión de la película de lubricante, pa |
| R | radio de la chumacera, m |
| S | número de Sommerfeld |

| | |
|----------------|---|
| t | tiempo, s |
| W | carga externa, N |
| x,y,z | coordenadas cartesianas |
| ϕ | ángulo de actitud, rad |
| θ | coordenada circunferencial, rad |
| Ω | frecuencia de vibración |
| ψ | parámetro de Vogelpolh |
| ω | velocidad de operación, rad/s |
| μ | viscosidad dinámica, N.s/m ² |
| $\alpha_{i,j}$ | ángulos de desalineamiento, $i,j=x,y$, rad |
| $\xi_{i,j}$ | factores de inclinación ó desalineamiento |

INTRODUCCIÓN

Un rotor que se encuentra soportado por chumaceras hidrodinámicas tiene una velocidad umbral arriba de la cual el sistema presenta cierta inestabilidad conocida como “oil whip” la cual se caracteriza por una vibración subsíncrona [1,2,3,4]. La frecuencia de vibración a la que ocurre ésta inestabilidad está alrededor de 0.5 veces la frecuencia fundamental y se ha demostrado que esta frecuencia es independiente de la flexibilidad del eje [1, 5]. En la literatura se presentan modelos de Jeffcott que consideran que existe una perfecta alineación del muñón en la chumacera, incluso para modelos de eje flexible. En rotores reales se observa que por muy bien que se haga el montaje de una máquina y por muy precisa que se haga la alineación siempre existirá un cierto grado de desalineamiento producido por el peso del rotor debido a que el eje siempre tiene cierta flexibilidad. En comparación con la extensa literatura sobre el tema general de chumaceras hidrodinámicas, el número de trabajos que estudian la estabilidad de las chumaceras con desalineamiento son muy pocos. En 1922, Fisher [6] realizó los primeros trabajos experimentales en donde muestra que existe una significativa diferencia en la rapidez del flujo axial en los extremos de la chumacera, así como, un calentamiento irregular. Se ha comprobado que el desalineamiento tiene un efecto desventajoso sobre la capacidad de carga de una chumacera [5,7,8]. Una de las contribuciones más satisfactorias en este campo es la de Smalley y McCallion [9] que en 1966 analizaron la influencia del desalineamiento sobre el funcionamiento de una chumacera en condiciones de estado estable y los resultados teóricos se validaron comparándolos con los trabajos experimentales presentados por Ocvirck [8]. En la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación en ESIME-IPN se han realizado una serie de estudios sobre chumaceras con desalineamiento que se han presentado en congresos nacionales e internacionales. En 2002 Gómez-Mancilla y V. Nossov presentaron expresiones analíticas para evaluar el comportamiento del campo de presión utilizando una formulación de chumaceras hidrodinámicas cortas [12, 13, 14]. A estos trabajos le ha seguido la solución numérica de la ecuación de Reynolds para evaluar el comportamiento de chumaceras finitas [15, 16 17]. También se han realizado estudios experimentales [18] para evaluar la contribución del desalineamiento en la estabilidad de sistemas rotor-chumaceras.

CASO DE ESTUDIO

El espesor de película del lubricante con desalineamiento.

La ecuación de Reynolds que define el campo de presión de estado estable para chumaceras hidrodinámicas en función de su movimiento está dada por la ecuación 1. Donde $\tilde{\theta} = \theta + \phi$ es la coordenada circunferencial medida a partir de la línea de centros, $p = \mu N(R/C)^2 \bar{p}$ es el campo de presión,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial h}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{24\pi}{\omega} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

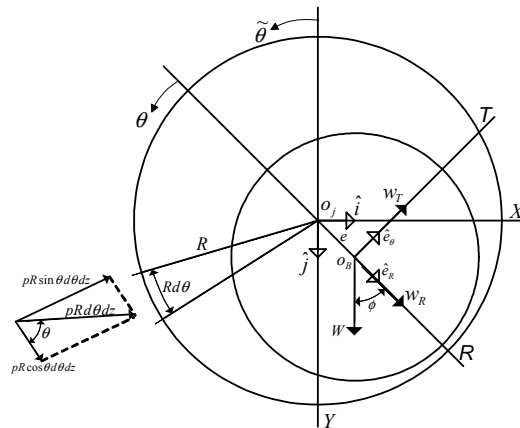


Figura 1 geometría de una chumacera hidrodinámica

$z = (L/2)\bar{z}$ es la coordenada axial, C es el claro radial, $\varepsilon = e/C$ es la excentricidad adimensional, la excentricidad e es la distancia que existe del centro de la chumacera al centro del muñón, D es el diámetro de la chumacera, $R=D/2$, $\phi = \tan^{-1}(\bar{F}_T/\bar{F}_R)$ es el ángulo de actitud, μ es la viscosidad dinámica, \bar{F}_T y \bar{F}_R son las componentes tangencial y radial de la fuerza, respectivamente. El espesor de película h_0 cuando el muñón y la chumacera están alineados está dado por:

$$H_0 = C[1 + \varepsilon \cos(\tilde{\theta} - \phi)] = Ch_0 \quad (2)$$

La figura 1 ilustra cada uno de estos parámetros. Para calcular el efecto del desalineamiento sobre las propiedades de la chumacera es necesario resolver la ecuación de Reynolds con una geometría modificada del espesor de película. La caracterización de la posición del eje por su excentricidad e y el ángulo de actitud ϕ es insuficiente cuando se considera el desalineamiento. Por lo tanto, es necesario introducir dos nuevos parámetros: α_x y α_y , los cuales definen las rotaciones alrededor de los ejes X y Y como se muestra en la figura 2. La posición de equilibrio de una chumacera con desalineamiento queda determinada por las coordenadas del centro del muñón e_0 , ϕ_0 , α_{x0} y α_{y0} . La figura 3 muestra el cambio de la película del lubricante debido a pequeñas perturbaciones Δx y Δy alrededor de la posición de equilibrio.

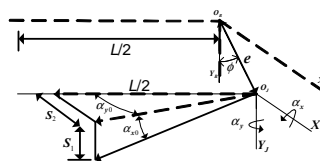


Figura 2 Geometría del muñón desalineado en la chumacera.

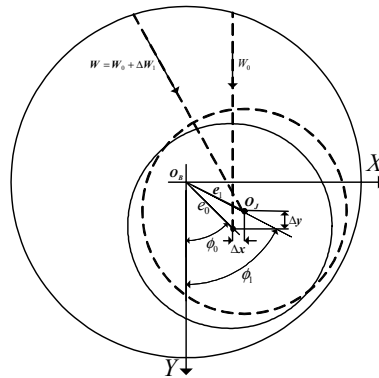


Figura 3 Cambio de la carga por el efecto de pequeñas perturbaciones Δx y Δy

De la figura 3 se obtiene:

$$\begin{aligned} e_0 \sin \phi_0 + \Delta x &= e_1 \sin \phi_1 \\ e_0 \cos \phi_0 + \Delta y &= e_1 \cos \phi_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Para considerar el desalineamiento es necesario girar el muñón α_x y α_y grados alrededor de la posición de equilibrio como se indica en la figura 2. Los desplazamientos angulares S_1 y S_2 están dados por $S_1 = z \tan \alpha_{x0}$ y $S_2 = z \tan \alpha_{y0}$. En chumaceras reales los desplazamientos angulares producidos por α_x y α_y son muy pequeños, por lo tanto, es válido decir que $S_1 = z\alpha_{x0}$ y $S_2 = z\alpha_{y0}$. Si imponemos pequeñas perturbaciones $\Delta\alpha_x$ y $\Delta\alpha_y$ alrededor de la posición de equilibrio entonces el desplazamiento angular total estará dado por:

$$\begin{aligned} S_1 &= z(\alpha_{x0} + \Delta\alpha_x) \\ S_2 &= z(\alpha_{y0} + \Delta\alpha_y) \end{aligned}$$

La figura 4 muestra el cambio de la película del fluido debido a la rotación del muñón, o bien:

$$\begin{aligned} e_1 \sin \phi_1 + z(\alpha_{y0} + \Delta\alpha_y) &= e \sin \phi \\ e_1 \cos \phi_1 + z(\alpha_{x0} + \Delta\alpha_x) &= e \cos \phi \end{aligned} \quad (4)$$

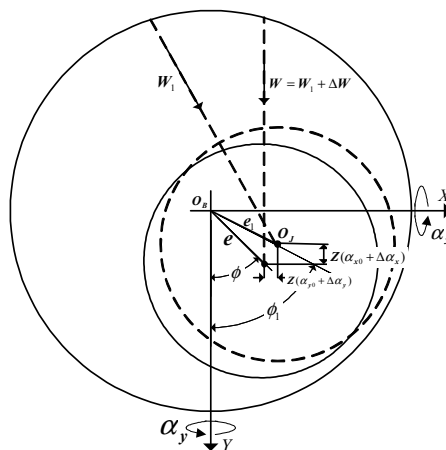


Figura 4 Cambio de la carga del muñón debido a desplazamientos angulares.

Se sustituyen (3) y (4) en la ecuación que define el espesor de película (2), y se obtiene la expresión del espesor de película con desalineamiento.

$$H = H_0 + \Delta x \sin \tilde{\theta} + \Delta y \cos \tilde{\theta} + z(\cos \tilde{\theta} \Delta \alpha_x + \sin \tilde{\theta} \Delta \alpha_y) \quad (5)$$

donde $H_0 = C + e_0 \cos(\tilde{\theta} - \phi_0) + z(\alpha_{x0} \cos \tilde{\theta} + \alpha_{y0} \sin \tilde{\theta})$ es el espesor estado estable. Dividiendo (5) por el claro radial C se obtiene el espesor de película adimensional:

$$h_0 = 1 + \varepsilon_0 \cos(\tilde{\theta} - \phi_0) + \xi \bar{z}(\alpha_{x0} \cos \tilde{\theta} + \alpha_{y0} \sin \tilde{\theta})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \omega[\Delta X' \sin \tilde{\theta} + \Delta Y' \cos \tilde{\theta} + \bar{z}(\Delta \xi'_x \cos \tilde{\theta} + \Delta \xi'_y \sin \tilde{\theta})] \quad (6)$$

donde las primas indican la derivada con respecto a τ el tiempo adimensional, $\tau = \omega t$. La ecuación (6) define al espesor de película de estado estable con desalineamiento, donde $\varepsilon = e/C$, $h_0 = H_0/C$, $z = (L/2)\bar{z}$, los parámetros ξ_x y ξ_y son los desplazamientos angulares adimensionales dados por:

$$\xi_x = (R/C)(L/D)\alpha_{x0}, \text{ y } \xi_y = (R/C)(L/D)\alpha_{y0}$$

Son posibles diferentes combinaciones de α_{x0} , α_{y0} , (R/C) y (L/D) para definir los valores de ξ_x y ξ_y . Hay que notar que es conveniente esta forma adimensional para estimar que los valores que puedan tomar la excentricidad e , y los desplazamientos angulares ξ_x y ξ_y no deben ser mayores que h_0 para asegurar que no exista contacto entre el muñón y la chumacera.

Ecuaciones para calcular coeficientes rotodinámicos con desalineamiento

El campo de presión de la película de lubricante genera fuerzas y momentos que dependen de los desplazamientos y de las rotaciones. Si se hace un desarrollo en series de Taylor de primer orden de estas fuerzas y momentos alrededor del punto de equilibrio se obtienen los coeficientes rotodinámicos de rigidez y de amortiguamiento. Las ecuaciones (7a,d) indican estos desarrollos en donde el subíndice cero indica la posición de equilibrio ó de estado estable.

$$F_x = (F_x)_0 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \alpha_x}\right)_0 \Delta \alpha_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \alpha_y}\right)_0 \Delta \alpha_y + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \xi_x}\right)_0 \Delta \xi_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \xi_y}\right)_0 \Delta \xi_y + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \alpha_x}\right)_0 \Delta \alpha_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \alpha_y}\right)_0 \Delta \alpha_y + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \xi_x}\right)_0 \Delta \xi_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \xi_y}\right)_0 \Delta \xi_y \quad (7a)$$

$$F_y = (F_y)_0 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \alpha_x}\right)_0 \Delta \alpha_x + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \alpha_y}\right)_0 \Delta \alpha_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \xi_x}\right)_0 \Delta \xi_x + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \xi_y}\right)_0 \Delta \xi_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \alpha_x}\right)_0 \Delta \alpha_x + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \alpha_y}\right)_0 \Delta \alpha_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \xi_x}\right)_0 \Delta \xi_x + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \xi_y}\right)_0 \Delta \xi_y \quad (7b)$$

$$M_x = (M_x)_0 + \left(\frac{\partial M_x}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \alpha_x}\right)_0 \Delta \alpha_x + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \alpha_y}\right)_0 \Delta \alpha_y + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \xi_x}\right)_0 \Delta \xi_x + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \xi_y}\right)_0 \Delta \xi_y + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \alpha_x}\right)_0 \Delta \alpha_x + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \alpha_y}\right)_0 \Delta \alpha_y + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \xi_x}\right)_0 \Delta \xi_x + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \xi_y}\right)_0 \Delta \xi_y \quad (7c)$$

$$M_y = (M_y)_0 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial M_y}{\partial \alpha_x}\right)_0 \Delta \alpha_x + \left(\frac{\partial M_y}{\partial \alpha_y}\right)_0 \Delta \alpha_y + \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathfrak{E}}\right)_0 \Delta \mathfrak{E} + \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathfrak{F}}\right)_0 \Delta \mathfrak{F} + \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathfrak{C}_x}\right)_0 \Delta \mathfrak{C}_x + \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathfrak{C}_y}\right)_0 \Delta \mathfrak{C}_y \quad (7d)$$

donde:

Coefficientes de Rigidez de Fuerza:

$$k_{F_{xx}} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_0, k_{F_{xy}} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_0, k_{F_{x\alpha_x}} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial \alpha_x}\right)_0, k_{F_{x\alpha_y}} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial \alpha_y}\right)_0; \\ k_{F_{yx}} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_0, k_{F_{yy}} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_0, k_{F_{y\alpha_x}} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial \alpha_x}\right)_0, k_{F_{y\alpha_y}} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial \alpha_y}\right)_0 \quad (8a)$$

Coefficientes de Amortiguamiento de fuerza:

$$c_{F_{xx}} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial \mathfrak{E}}\right)_0, c_{F_{xy}} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial \mathfrak{F}}\right)_0, c_{F_{x\alpha_x}} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial \mathfrak{C}_x}\right)_0, c_{F_{x\alpha_y}} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial \mathfrak{C}_y}\right)_0; \\ c_{F_{yx}} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial \mathfrak{E}}\right)_0, c_{F_{yy}} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial \mathfrak{F}}\right)_0, c_{F_{y\alpha_x}} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial \mathfrak{C}_x}\right)_0, c_{F_{y\alpha_y}} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial \mathfrak{C}_y}\right)_0 \quad (8b)$$

Coefficientes de Rigidez de Momento:

$$k_{M_{xx}} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial x}\right)_0, k_{M_{xy}} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)_0, k_{M_{x\alpha_x}} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial \alpha_x}\right)_0, k_{M_{x\alpha_y}} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial \alpha_y}\right)_0; k_{M_{yx}} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x}\right)_0, k_{M_{yy}} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial y}\right)_0, k_{M_{y\alpha_x}} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial \alpha_x}\right)_0, k_{M_{y\alpha_y}} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial \alpha_y}\right)_0 \quad (8c)$$

Coefficientes de Amortiguamiento de Momento:

$$c_{M_{xx}} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathfrak{E}}\right)_0, c_{M_{xy}} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathfrak{F}}\right)_0, c_{M_{x\alpha_x}} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathfrak{C}_x}\right)_0, c_{M_{x\alpha_y}} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathfrak{C}_y}\right)_0; \\ c_{M_{yx}} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathfrak{E}}\right)_0, c_{M_{yy}} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathfrak{F}}\right)_0, c_{M_{y\alpha_x}} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathfrak{C}_x}\right)_0, c_{M_{y\alpha_y}} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathfrak{C}_y}\right)_0 \quad (8d)$$

La figura 5, muestra la relación entre el campo de presión y las fuerzas y los momentos hidrodinámicos. De esta figura se obtienen las fuerzas *Fuerzas de Reacción* F_R y F_T , y los momentos aplicados al muñón M_R y M_T , que en forma adimensional son:

$$\bar{F}_x = \frac{F_x}{\mu NLD(R/C)^2} = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} \bar{p} \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\tilde{z} \quad (9a)$$

$$\bar{F}_y = \frac{F_y}{\mu NLD(R/C)^2} = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} \bar{p} \cos \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\tilde{z} \quad (9b)$$

$$\bar{M}_x = \frac{M_x}{\mu NLD(R/C)^2 L} = -\frac{1}{8} \int_{-1}^1 \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} \bar{p} \tilde{z} \cos \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\tilde{z} \quad (9c)$$

$$\bar{M}_y = \frac{M_y}{\mu NLD(R/C)^2 L} = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} \bar{p} \tilde{z} \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\tilde{z} \quad (9d)$$

donde $\tilde{\theta} = \theta + \phi$ y $p = \mu N \left(\frac{R}{C}\right)^2 \bar{p}$, $z = \frac{L}{2} \tilde{z}$. El límite $\tilde{\theta}_1$ corresponde al punto de inyección del lubricante y el límite $\tilde{\theta}_2$ corresponde a la localización de la curva de cavitación. Debido al efecto del desalineamiento el ángulo $\tilde{\theta}_2$ cambia de valor con respecto a la coordenada axial z por lo que no es posible evaluar las integrales (9) de forma analítica aun para los casos especiales de chumaceras cortas ó largas.

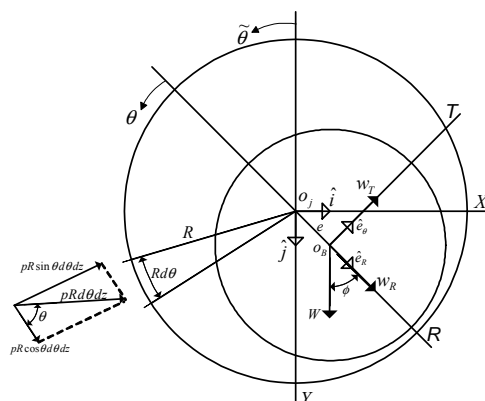


Figura 5 Fuerzas de reacción y momentos aplicados al muñón

Cálculo numérico de coeficientes rotodinámicos por diferenciación numérica

Para calcular los coeficientes rotodinámicos es necesario resolver la ecuación de Reynolds (1) junto con la ecuación del espesor de película con desalineamiento (5), bajo las condiciones de frontera (10), (11) y (12) proponiendo pequeñas perturbaciones.

$$p = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm L/2 \quad (10)$$

$$p = \frac{\partial p}{\partial \tilde{\theta}} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{\theta} = \tilde{\theta}(z)_{cav} \quad (11)$$

$$p_0 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{iny} \quad (12)$$

Las figuras 3 y 4 muestran estas pequeñas perturbaciones alrededor de la posición de equilibrio. En este caso de un sistema con desalineamiento es necesario perturbar con ΔX , ΔY , $\Delta \xi_x$, $\Delta \xi_y$ para el cálculo de los coeficientes de rigidez y con $\Delta X'$, $\Delta Y'$, $\Delta \xi'_x$, $\Delta \xi'_y$ para el cálculo de los coeficientes de amortiguamiento. Se observa que el espesor de película (5) permite perturbar adecuadamente el campo de presión para el cálculo de los coeficientes rotodinámicos. Por lo tanto, una vez que se resuelve la ecuación de Reynolds (1) con $h = h_0$ y $\partial h_0 / \partial t = 0$ para conocer las condiciones de estado estable se procede a perturbar la ecuación de Reynolds y formar los coeficientes dados por (8a,d), por ejemplo, si se perturba con $\Delta X = \Delta x / C$ se obtienen:

$$k_{xx} \equiv \frac{\Delta F_{x0}}{\Delta x}; \quad k_{yx} \equiv \frac{\Delta F_{y0}}{\Delta x}; \quad k_{M,x} \equiv \frac{\Delta M_{x0}}{\Delta x} \quad \text{y} \quad k_{M,y} \equiv \frac{\Delta M_{y0}}{\Delta x}$$

Donde la notación ΔF_{i0} es igual a $F_i - (F_i)_0$ para $i = X, Y$. El subíndice cero indica la posición de estado estable. Para agilizar la convergencia se introduce el parámetro de Vogelpolh [11] $\psi = \bar{p}h^{3/2}$ en la ecuación de Reynolds (1) obteniéndose:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\theta}^2} + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{z}^2} = \frac{0.75\psi}{h^2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial \tilde{\theta}}\right)^2 + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \left(\frac{\partial h}{\partial \tilde{z}}\right)^2 \right] + \frac{1.5\psi}{h} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{\theta}^2} + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{z}^2} \right] + Q \quad (13)$$

donde $Q = \frac{12\pi}{h^{1.5}} \frac{\partial h}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{24\pi}{\omega h^{1.5}} \frac{\partial h}{\partial t}$

Para resolver numéricamente la ecuación (13) es necesario generar una malla rectangular de $m \times n$ nodos. Los incrementos de la coordenada circunferencial y la coordenada axial están dados por:

$$\Delta \tilde{\theta} = \frac{2\pi}{j\text{ nodo} - 1}, \quad \tilde{\theta} = \tilde{\theta}(j), \quad \text{y} \quad \Delta \tilde{z} = \frac{2}{i\text{ nodo} - 1}, \quad \tilde{z} = \tilde{z}(i)$$

Por lo tanto, un punto cualquiera de la chumacera queda definido por $i(1 \leq i \leq i\text{ nodo})$ y $j(1 \leq j \leq j\text{ nodo})$. La ecuación (13) expresada en su forma de diferencias finitas es:

$$\psi_{i,j} = \frac{\frac{1}{\Delta \tilde{\theta}^2} (\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) + \frac{(D/L)^2}{\Delta \tilde{z}^2} (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) - \frac{12\pi}{h^{1.5}} \frac{\partial h}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{24\pi}{\omega h^{1.5}} \frac{\partial h}{\partial t}}{\frac{2}{\Delta \tilde{\theta}^2} + \frac{2(D/L)^2}{\Delta \tilde{z}^2} + \frac{1.5}{h} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{\theta}^2} + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{z}^2} \right] + \frac{0.75}{h^2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial \tilde{\theta}}\right)^2 + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \left(\frac{\partial h}{\partial \tilde{z}}\right)^2 \right]} \quad (14)$$

A continuación se presentan los pasos necesarios para el cálculo de las condiciones de estado estable y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento por el método de diferenciación numérica.

- 1) Para valores de excentricidad ε , relación (L/D) y factores de inclinación ξ_x y ξ_y , dados se propone un valor para el ángulo de actitud ϕ_0 .
- 2) Haciendo ΔX , ΔY , $\Delta \xi_x$, $\Delta \xi_y$ y $\Delta X'$, $\Delta Y'$, $\Delta \xi'_x$, $\Delta \xi'_y$ iguales a cero se resuelve la ecuación de Reynolds en su expresión por diferencias finitas (14) y se calcula la presión de estado estable de la definición $\psi = \bar{p}h_0^{1.5}$.
- 3) Una vez que la ecuación (14) converge para todos los puntos de la malla y se conoce la presión de estado estable se calculan las fuerzas y momentos utilizando las expresiones (9 a,b,c,d). Utilizando (9a,b) se hace una transformación y se calculan las fuerzas de reacción en sus componentes radial y tangencial \bar{F}_R y \bar{F}_T .
- 4) Calcular el nuevo ángulo de actitud $\phi = \tan^{-1}(\bar{F}_T / \bar{F}_R)$. Si el error absoluto del ángulo de actitud no está dentro de lo requerido proponer un nuevo ángulo de actitud y repetir el procedimiento a partir del paso 2.
- 5) Una vez que se obtiene la convergencia para el ángulo de actitud es necesario guardar las condiciones de estado estable ϕ_0 , h_0 , \bar{p}_0 y S , donde el numero de Sommerfeld S se calcula de $S = (\bar{F}_R^2 + \bar{F}_T^2)^{-1/2}$. También es necesario guardar $\psi_{i,j}(\text{estado estable})$.
- 6) Conocidas las condiciones de estado estable se procede al cálculo de los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento por lo que se proponen pequeñas perturbaciones del campo de presión. Por ejemplo si perturbamos con $\Delta \xi'_x$ entonces: $h = h_0$, $\frac{\partial h}{\partial t} = \omega \tilde{z} \cos \tilde{\theta} \Delta \xi'_x$ donde $h_0 = 1 + \varepsilon_0 \cos(\tilde{\theta} - \phi_0) + \tilde{z}(\xi_x \cos \tilde{\theta} + \xi_y \sin \tilde{\theta})$

7) Con este valor de h perturbado se resuelve la ecuación (14) y se calcula el cambio de presión con respecto a la posición de estado estable.

$$\Delta\bar{p} = \psi_{i,j} / h_{i,j}^{1.5} - \psi_{i,j(\text{estado estable})} / h_{i,j(\text{estado estable})}^{1.5}$$

8) Con este valor de $\Delta\bar{p}$ obtenido al perturbar con $\Delta\xi'_x$ se pueden evaluar los siguientes coeficientes como se indica a continuación.

$$\Delta\bar{F}_x = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} \Delta\bar{p} \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\tilde{z} \Rightarrow \tilde{c}_{F_x \alpha_x} = \frac{\Delta\bar{F}_x}{\Delta\xi'_x} S$$

$$\Delta\bar{F}_y = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} \Delta\bar{p} \cos \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\tilde{z} \Rightarrow \tilde{c}_{F_y \alpha_x} = \frac{\Delta\bar{F}_y}{\Delta\xi'_x} S$$

$$\Delta\bar{M}_x = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} \tilde{z} \Delta\bar{p} \cos \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\tilde{z} \Rightarrow \tilde{c}_{M_x \alpha_x} = \frac{\Delta\bar{M}_x}{\Delta\xi'_x} S$$

$$\Delta\bar{M}_y = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} \tilde{z} \Delta\bar{p} \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\tilde{z} \Rightarrow \tilde{c}_{M_y \alpha_x} = \frac{\Delta\bar{M}_y}{\Delta\xi'_x} S$$

Se propone una perturbación diferente y se repite el procedimiento a partir del paso 6 y se procede de esta manera hasta que se calculan todos los coeficientes.

RESULTADOS

Comportamiento de los coeficientes rotodinámicos para diferentes valores de desalineamiento

Considérese un rotor de turbina que pesa $W=10\ 000$ N, está soportado por chumaceras idénticas que tienen una relación de $L/D=0.75$, $C/R=0.0015$, $D=60$ mm, la viscosidad del aceite es de $\mu=0.020$ pa.s. La longitud de la chumacera es de $L=0.75(60\text{mm})=45\text{mm}$, el claro radial $C=0.0015$ ($0.060/2$) = $45\text{e-}6$ m. Suponemos que la velocidad de operación es de $\omega=1000$ rad/s. Con estos datos calculamos el número de Sommerfeld:

$$S = \frac{\mu N L D}{W} \left(\frac{R}{C} \right)^2 = \frac{(0.020)(159.15)(0.045)(0.060)}{5000} \left(\frac{1}{0.0015} \right)^2 = 0.764$$

Con el número de Sommerfeld de 0.764, una relación de $L/D=0.75$ y con $\xi_x = 0.1$ y $\xi_y = 0$, tenemos que $\varepsilon_0 = 0.25$ y los siguientes coeficientes rotodinámicos que se muestran en la tabla 1. Los coeficientes que dependen de las rotaciones parecen ser más pequeños que los que no dependen de ellas, aun así, no se puede decir nada acerca de su magnitud y de sus efectos debido a que no tienen las mismas unidades. Las figuras 6 y 7 muestran como cambian los coeficientes rotodinámicos directos y acoplados que generalmente se presentan en la literatura internacional.

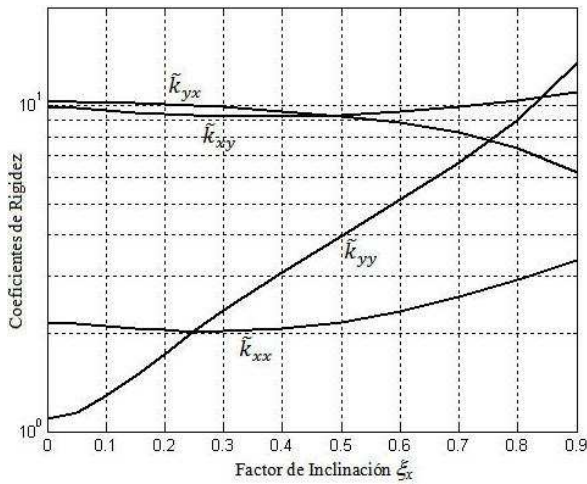


Figura 6 Comportamiento de los coeficientes de rigidez con $L/D=1$, $\varepsilon_\theta=0.1$, $\xi_y=0$ y ξ_x variable.

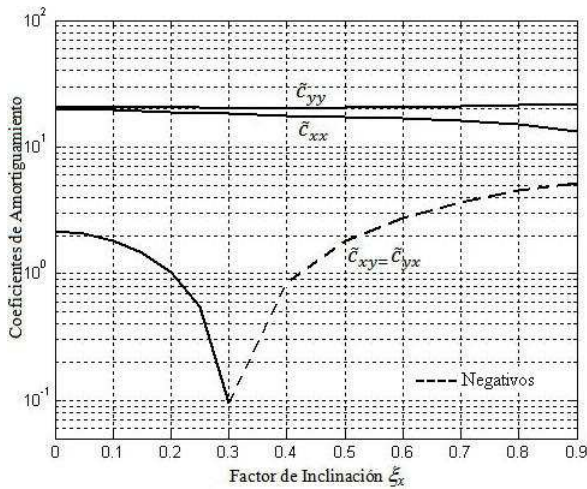


Figura 7 Comportamiento de los coeficientes de amortiguamiento con $L/D=1$, $\varepsilon_\theta=0.1$, $\xi_y=0$ y ξ_x variable.

Las figuras 6 y 7 muestran que los coeficientes \tilde{k}_{xx} , \tilde{k}_{xy} y \tilde{k}_{yx} y \tilde{c}_{yy} , \tilde{c}_{xx} cambian poco cuando el factor de inclinación ξ_x aumenta y los coeficientes \tilde{k}_{yy} , \tilde{c}_{xy} y \tilde{c}_{yx} cambian significativamente a medida que el desalineamiento se incrementa. Incluso el coeficiente de amortiguamiento acoplado \tilde{c}_{yx} cambia de positivo a negativo, lo que podría afectar la estabilidad.

Modelo matemático de Jeffcott de rotor flexible sin desalineamiento.

Considérese un modelo de Jeffcott de eje flexible. Debido a ésta flexibilidad, el centro geométrico del disco O_D no coincidirá con el del centro geométrico del muñón O_J , como se ilustra en la figura 8.

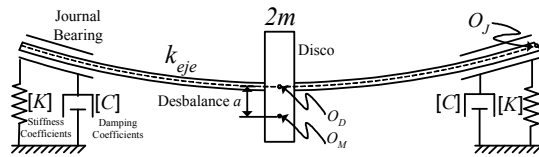


Figura 8 Modelo de Jeffcott de eje flexible.

donde $k = K/2$, $K=48EI / l^3$ es la rigidez del eje, l es la distancia entre centros de las chumacera, $2m$ es la masa del disco, $[k]$ y $[c]$ son las matrices de rigidez y amortiguamiento de la película de lubricante. La figura 9 es un esquema del movimiento del centro del muñón cuyas coordenadas son (x_0, y_0) y los desplazamientos del centro del disco están designados por las coordenadas (x, y) . El centro de la chumacera se designa por O_B y la posición de equilibrio del muñón está dada por O_{Je} , y O_{Jd} es la posición dinámica del centro del muñón.

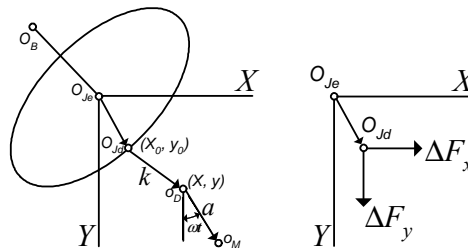


Figura 9 Movimiento del centro del muñón y disco.

De acuerdo con la figura 9 las ecuaciones de movimiento del centro del muñón O_{Jd} son:

$$\begin{aligned} -\Delta F_x + k(x - x_0) &= 0 \\ -\Delta F_y + k(y - y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

y las ecuaciones de movimiento del centro del disco O_D están dadas por:

$$\begin{aligned} -k(x - x_0) &= m(\ddot{x} - a\omega^2 \sin \omega t) \\ -k(y - y_0) &= m(\ddot{y} - a\omega^2 \cos \omega t) \end{aligned} \quad (16)$$

donde $k(x - x_0)$ y $k(y - y_0)$ representan las fuerzas elásticas debido a la flexibilidad del eje y los términos ΔF_x y ΔF_y son las fuerzas de reacción en las chumaceras. Estas fuerzas hidrodinámicas se pueden expresar en términos de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento [1,2,5].

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= k_{xx}x_0 + k_{xy}y_0 + c_{xx}\dot{x}_0 + c_{xy}\dot{y}_0 \\ \Delta F_y &= k_{yx}x_0 + k_{yy}y_0 + c_{yx}\dot{x}_0 + c_{yy}\dot{y}_0 \end{aligned} \quad (17)$$

Si se sustituyen las fuerzas de reacción en las ecuaciones (15) se obtiene el modelo de Jeffcott de rotor flexible. El modelo matemático (18) es de aplicación limitada, ya que, aunque se consideró que el eje es flexible, no se tomó en cuenta que el muñón adquiere cierto desalineamiento debido precisamente a esa flexibilidad. Este modelo solo tendrá validez para pequeños valores de flexibilidad del eje.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + k(x - x_0) &= ma\omega^2 \sin \omega t \\
 m\ddot{y} + k(y - y_0) &= ma\omega^2 \cos \omega t \\
 k_{xx}x_0 + k_{yy}y_0 + c_{xx}\dot{x}_0 + c_{yy}\dot{y}_0 &= k(x - x_0) \\
 k_{yx}x_0 + k_{xy}y_0 + c_{yx}\dot{x}_0 + c_{xy}\dot{y}_0 &= k(y - y_0)
 \end{aligned} \quad (18)$$

Un modelo mejor elaborado debe de contener los coeficientes rotodinámicos con desalineamiento del muñón. Para obtener una mayor generalidad en los resultados es necesario adimensionalizar el sistema de ecuaciones (18), sean las siguientes relaciones adimensionales.:

$$\bar{x}_0 = \frac{x_0}{C}; \bar{y}_0 = \frac{y_0}{C}; \bar{x} = \frac{x}{C}; \bar{y} = \frac{y}{C}; \tau = \omega t$$

donde C es el claro radial de la chumacera y τ es el tiempo adimensional. Sustituyendo éstas relaciones en (18) se obtienen las ecuaciones de movimiento adimensionales:

$$p^2\bar{x}'' + \frac{1}{\gamma}(\bar{x} - \bar{x}_0) = p^2\left(\frac{a}{C}\right)\sin \tau \quad (19a)$$

$$p^2\bar{y}'' + \frac{1}{\gamma}(\bar{y} - \bar{y}_0) = p^2\left(\frac{a}{C}\right)\cos \tau$$

$$\tilde{k}_{xx}\bar{x}_0 + \tilde{k}_{yy}\bar{y}_0 + \tilde{c}_{xx}\bar{x}'_0 + \tilde{c}_{yy}\bar{y}'_0 = \frac{1}{\gamma}(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad (19b)$$

$$\tilde{k}_{yx}\bar{x}_0 + \tilde{k}_{xy}\bar{y}_0 + \tilde{c}_{yx}\bar{x}'_0 + \tilde{c}_{xy}\bar{y}'_0 = \frac{1}{\gamma}(\bar{y} - \bar{y}_0)$$

donde $\gamma = \delta/C$ es la deflexión estática adimensional, $\delta = W/k$ es la deflexión del eje y W es la carga que actúa sobre la chumacera. Los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento son adimensionales de la forma $\tilde{c}_{ij} = (C\omega/W)c_{ij}$ y $\tilde{k}_{ij} = (C/W)k_{ij}$, para $i,j=x,y$. Para analizar la estabilidad del sistema de ecuaciones (19) se sustituyen las siguientes soluciones armónicas. $\bar{x} = X e^{s\tau}$; $\bar{y} = Y e^{s\tau}$; $\bar{x}_0 = X_0 e^{s\tau}$; $\bar{y}_0 = Y_0 e^{s\tau}$ y se obtiene:

$$\begin{bmatrix}
 p^2s^2 + 1/\gamma & 0 & -1/\gamma & 0 \\
 0 & p^2s^2 + 1/\gamma & 0 & -1/\gamma \\
 -1/\gamma & 0 & \tilde{k}_{xx} + 1/\gamma + s\tilde{c}_{xx} & \tilde{k}_{xy} + s\tilde{c}_{xy} \\
 0 & -1/\gamma & \tilde{k}_{yx} + s\tilde{c}_{yx} & \tilde{k}_{yy} + 1/\gamma + s\tilde{c}_{yy}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 X \\
 Y \\
 X_0 \\
 Y_0
 \end{Bmatrix} = 0 \quad (20)$$

Las ecuaciones (20) poseen una solución no-trivial si y solo si el determinante del sistema es igual a cero. Haciendo $s = 0 + i\Omega_v$ e obtienen las siguientes expresiones para calcular la velocidad umbral de estabilidad y la frecuencia de vibración.

$$\Omega_v^2 = \frac{\Delta(k)[\Sigma(c)]^2 + [\Delta(c,k)]^2 - \Delta(c,k)\Sigma(c)\Sigma(k)}{\Delta(c)[\Sigma(c)]^2} \quad (21)$$

$$p_{umb}^2 = \frac{\Delta(c)\Delta(c,k)[\Sigma(c)]^2}{A + [\Delta(c,k)]^2\Sigma(c) + \Delta(k)[\Sigma(c)]^3 - \Delta(c,k)[\Sigma(c)]^2\Sigma(k)} \quad (22)$$

donde $A = \gamma \left\{ [\Delta(c, k)]^3 + \Delta(c, k) \Delta(k) [\Sigma(c)]^2 - [\Delta(c, k)]^2 \Sigma(c) \Sigma(k) \right\}$ y $\Sigma(c) = \tilde{c}_{xx} + \tilde{c}_{yy}$, $\Sigma(k) = \tilde{k}_{xx} + \tilde{k}_{yy}$, $\Delta(c) = (\tilde{c}_{xx} \tilde{c}_{yy} - \tilde{c}_{yx} \tilde{c}_{xy})$
 $\Delta(k) = \tilde{k}_{xx} \tilde{k}_{yy} - \tilde{k}_{yx} \tilde{k}_{xy}$, $\Delta(c, k) = \tilde{k}_{xx} \tilde{c}_{yy} + \tilde{k}_{yy} \tilde{c}_{xx} - \tilde{k}_{yx} \tilde{c}_{xy} - \tilde{k}_{xy} \tilde{c}_{yx}$

De la expresión (21) se puede notar que la frecuencia de vibración solo depende de los valores de los coeficientes rotodinámicos y no depende de la flexibilidad del eje. La figura 10 muestra que la frecuencia de vibración para diferentes valores de L/D de la chumacera es de naturaleza subsíncrona y ocurre alrededor de 0.5 veces la frecuencia fundamental. También se puede notar que para chumaceras cortas esta frecuencia se encuentra arriba de 0.5, y a medida que la relación de L/D aumenta la frecuencia de vibración disminuye y por tal razón el umbral de estabilidad disminuye. La expresión (22) muestra que la velocidad umbral de estabilidad está afectada por la flexibilidad del eje.

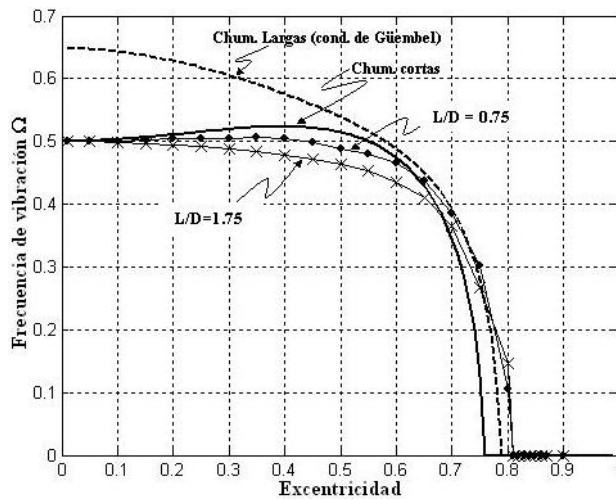


Figura 10 Frecuencia de vibración para un rotor soportado por chumaceras hidrodinámicas.

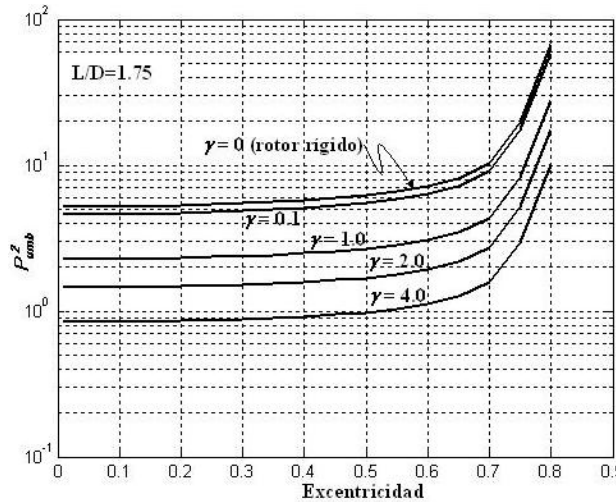


Figura 11 Velocidad umbral de estabilidad para eje flexible

En la figura 11 se comparan la velocidad umbral de estabilidad de rotor rígido y de rotor flexible con diferentes valores de flexibilidad notándose que a medida que la flexibilidad del eje aumenta, la velocidad umbral de estabilidad disminuye.

Modelo matemático de Jeffcott de rotor flexible con desalineamiento.

Para considerar el desalineamiento del muñón en las chumaceras es necesario incluir en el modelo matemático los momentos elásticos del eje. Se asume que las deflexiones del eje son pequeñas para permitir el uso de la teoría lineal de vigas, las fuerzas de reacción y los momentos elásticos están dados para un rotor simétrico y simplemente soportado por [1,3]:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{M}_y \end{Bmatrix} = -\frac{48EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x-x_0 \\ \alpha_y \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_y \\ \bar{M}_x \end{Bmatrix} = -\frac{48EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y-y_0 \\ -\alpha_x \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Considerando que los desplazamientos axiales y torsionales se desprecian. Las ecuaciones de movimiento para un disco de masa $2m$ soportado por chumaceras hidrodinámicas idénticas, como el de la figura 6, son las mismas que las ecuaciones (16) ya que el rotor es simétrico y está exento de efectos giroscópicos. Para las chumaceras es necesario añadir además de las fuerzas elásticas (15) , los momentos hidrodinámicos que se generan en la película del lubricante.

$$\begin{aligned} -\Delta M_x - k_\psi \alpha_x &= 0 \\ -\Delta M_y + k_\psi \alpha_x &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

donde $k = 24EI / l^3$ y $k_\psi = 6EI / l$, y,

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= k_{F,x}x_0 + k_{F,y}y_0 + k_{F,\alpha_x}\alpha_x + k_{F,\alpha_y}\alpha_y + c_{F,x}\dot{x}_0 + c_{F,y}\dot{y}_0 + c_{F,\alpha_x}\dot{\alpha}_x + c_{F,\alpha_y}\dot{\alpha}_y \\ \Delta F_y &= k_{F,x}x_0 + k_{F,y}y_0 + k_{F,\alpha_x}\alpha_x + k_{F,\alpha_y}\alpha_y + c_{F,x}\dot{x}_0 + c_{F,y}\dot{y}_0 + c_{F,\alpha_x}\dot{\alpha}_x + c_{F,\alpha_y}\dot{\alpha}_y \\ \Delta M_x &= k_{M,x}x_0 + k_{M,y}y_0 + k_{M,\alpha_x}\alpha_x + k_{M,\alpha_y}\alpha_y + c_{M,x}\dot{x}_0 + c_{M,y}\dot{y}_0 + c_{M,\alpha_x}\dot{\alpha}_x + c_{M,\alpha_y}\dot{\alpha}_y \\ \Delta M_y &= k_{M,x}x_0 + k_{M,y}y_0 + k_{M,\alpha_x}\alpha_x + k_{M,\alpha_y}\alpha_y + c_{M,x}\dot{x}_0 + c_{M,y}\dot{y}_0 + c_{M,\alpha_x}\dot{\alpha}_x + c_{M,\alpha_y}\dot{\alpha}_y \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones para un sistema que considera la flexibilidad del eje y el desalineamiento en las chumaceras y sin efectos giroscópicos son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k(x-x_0) &= m\omega^2 \sin \omega t \\ m\ddot{y} + k(y-y_0) &= m\omega^2 \cos \omega t \\ k(x-x_0) &= k_{F,x}x_0 + k_{F,y}y_0 + k_{F,\alpha_x}\alpha_x + k_{F,\alpha_y}\alpha_y + c_{F,x}\dot{x}_0 + c_{F,y}\dot{y}_0 + c_{F,\alpha_x}\dot{\alpha}_x + c_{F,\alpha_y}\dot{\alpha}_y \\ k(y-y_0) &= k_{F,x}x_0 + k_{F,y}y_0 + k_{F,\alpha_x}\alpha_x + k_{F,\alpha_y}\alpha_y + c_{F,x}\dot{x}_0 + c_{F,y}\dot{y}_0 + c_{F,\alpha_x}\dot{\alpha}_x + c_{F,\alpha_y}\dot{\alpha}_y \\ -k_\psi \alpha_x &= k_{M,x}x_0 + k_{M,y}y_0 + k_{M,\alpha_x}\alpha_x + k_{M,\alpha_y}\alpha_y + c_{M,x}\dot{x}_0 + c_{M,y}\dot{y}_0 + c_{M,\alpha_x}\dot{\alpha}_x + c_{M,\alpha_y}\dot{\alpha}_y \\ k_\psi \alpha_y &= k_{M,x}x_0 + k_{M,y}y_0 + k_{M,\alpha_x}\alpha_x + k_{M,\alpha_y}\alpha_y + c_{M,x}\dot{x}_0 + c_{M,y}\dot{y}_0 + c_{M,\alpha_x}\dot{\alpha}_x + c_{M,\alpha_y}\dot{\alpha}_y \end{aligned} \quad (28)$$

Introduciendo los parámetros adimensionales $\bar{x}_0 = x_0 / C$; $\bar{y}_0 = y_0 / C$; $\bar{x} = x / C$; $\bar{y} = y / C$; $\bar{\xi}_x = \xi \alpha_x$; $\bar{\xi}_y = \xi \alpha_y$; $\tau = \omega t$, se obtienen las ecuaciones (29) en forma adimensional. Donde $\gamma = W / kC$ es la flexibilidad adimensional relacionada con la flexión del eje por el efecto de una fuerza y $\gamma_\psi = \xi WL / k_\psi$ es la flexibilidad adimensional relacionada con la flexión del eje por el efecto de un momento.

$$\begin{aligned}
 p^2 \bar{x}'' + \frac{1}{\gamma} (\bar{x} - \bar{x}_0) &= p^2 \left(\frac{a}{C} \right) \sin \tau \\
 p^2 \bar{y}'' + \frac{1}{\gamma} (\bar{y} - \bar{y}_0) &= p^2 \left(\frac{a}{C} \right) \cos \tau \\
 \tilde{k}_{F,x} \bar{x}_0 + \tilde{k}_{F,y} \bar{y}_0 + \tilde{k}_{F,\alpha_x} \xi_x + \tilde{k}_{F,\alpha_y} \xi_y + \tilde{c}_{F,x} \bar{x}'_0 + \tilde{c}_{F,y} \bar{y}'_0 + \tilde{c}_{F,\alpha_x} \xi'_x + \tilde{c}_{F,\alpha_y} \xi'_y &= \frac{1}{\gamma} (\bar{x} - \bar{x}_0) \\
 \tilde{k}_{F,x} \bar{x}_0 + \tilde{k}_{F,y} \bar{y}_0 + \tilde{k}_{F,\alpha_x} \xi_x + \tilde{k}_{F,\alpha_y} \xi_y + \tilde{c}_{F,x} \bar{x}'_0 + \tilde{c}_{F,y} \bar{y}'_0 + \tilde{c}_{F,\alpha_x} \xi'_x + \tilde{c}_{F,\alpha_y} \xi'_y &= \frac{1}{\gamma} (\bar{y} - \bar{y}_0) \\
 \tilde{k}_{M,x} \bar{x}_0 + \tilde{k}_{M,y} \bar{y}_0 + \tilde{k}_{M,\alpha_x} \xi_x + \tilde{k}_{M,\alpha_y} \xi_y + \tilde{c}_{M,x} \bar{x}'_0 + \tilde{c}_{M,y} \bar{y}'_0 + \tilde{c}_{M,\alpha_x} \xi'_x + \tilde{c}_{M,\alpha_y} \xi'_y &= -\frac{1}{\gamma_\psi} \xi_x \\
 \tilde{k}_{M,x} \bar{x}_0 + \tilde{k}_{M,y} \bar{y}_0 + \tilde{k}_{M,\alpha_x} \xi_x + \tilde{k}_{M,\alpha_y} \xi_y + \tilde{c}_{M,x} \bar{x}'_0 + \tilde{c}_{M,y} \bar{y}'_0 + \tilde{c}_{M,\alpha_x} \xi'_x + \tilde{c}_{M,\alpha_y} \xi'_y &= \frac{1}{\gamma_\psi} \xi_y
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Para analizar la estabilidad del modelo matemático (29) se suponen las soluciones armónicas $\bar{x} = X e^{s\tau}$; $\bar{y} = Y e^{s\tau}$; $\bar{x}_0 = X_0 e^{s\tau}$; $\bar{y}_0 = Y_0 e^{s\tau}$; $\xi_x = \Xi_x e^{s\tau}$; $\xi_y = \Xi_y e^{s\tau}$ y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix}
 p^2 s^2 \gamma + 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p^2 s^2 \gamma + 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & \gamma(\tilde{k}_{F,x} + s\tilde{c}_{F,x}) + 1 & \gamma(\tilde{k}_{F,y} + s\tilde{c}_{F,y}) & \gamma(\tilde{k}_{F,\alpha_x} + s\tilde{c}_{F,\alpha_x}) & \gamma(\tilde{k}_{F,\alpha_y} + s\tilde{c}_{F,\alpha_y}) \\
 0 & -1 & \gamma(\tilde{k}_{F,y} + s\tilde{c}_{F,y}) & \gamma(\tilde{k}_{F,x} + s\tilde{c}_{F,x}) + 1 & \gamma(\tilde{k}_{F,\alpha_x} + s\tilde{c}_{F,\alpha_x}) & \gamma(\tilde{k}_{F,\alpha_y} + s\tilde{c}_{F,\alpha_y}) \\
 0 & 0 & \gamma_\psi(\tilde{k}_{M,x} + s\tilde{c}_{M,x}) & \gamma_\psi(\tilde{k}_{M,y} + s\tilde{c}_{M,y}) & \gamma_\psi(\tilde{k}_{M,\alpha_x} + s\tilde{c}_{M,\alpha_x}) + 1 & \gamma_\psi(\tilde{k}_{M,\alpha_y} + s\tilde{c}_{M,\alpha_y}) \\
 0 & 0 & \gamma_\psi(\tilde{k}_{M,x} + s\tilde{c}_{M,x}) & \gamma_\psi(\tilde{k}_{M,y} + s\tilde{c}_{M,y}) & \gamma_\psi(\tilde{k}_{M,\alpha_x} + s\tilde{c}_{M,\alpha_x}) & \gamma_\psi(\tilde{k}_{M,\alpha_y} + s\tilde{c}_{M,\alpha_y}) - 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 X \\
 Y \\
 X_0 \\
 Y_0 \\
 \Xi_x \\
 \Xi_y
 \end{bmatrix} = 0
 \tag{30}$$

Para encontrar la velocidad umbral de estabilidad y la frecuencia de vibración se sustituyen en (30) los valores de los coeficientes rotodinámicos calculados para un punto de equilibrio dado y se busca el valor de p^2 que hace que la parte real de s sea igual a cero. Las siguientes figuras presentan la velocidad umbral de estabilidad y la frecuencia de vibración para diferentes valores de excentricidad y factores de desalineamiento. Se supone una relación de $L/L=4.92$, por lo que el desalineamiento por el peso del rotor para $\gamma=0.1$ es igual a $\xi_x = (3l/2L)\gamma = 0.030$ [5].

Las figuras 12 y 14 muestran la velocidad umbral de estabilidad y la frecuencia de vibración para valores de desalineamiento de $\xi_x = 0.1$ y $\xi_x = 0.2$. La figura 10 muestra que para valores de ϵ_{\max} mayores de 0.5 la velocidad umbral de estabilidad se reduce considerablemente. La figura 11 muestra que la frecuencia de vibración de un sistema rotor-chumaceras alineado y desalineado de eje flexible permanece invariable. Por lo que, se puede decir que la frecuencia de vibración es independiente de la flexibilidad del eje y del desalineamiento del muñón

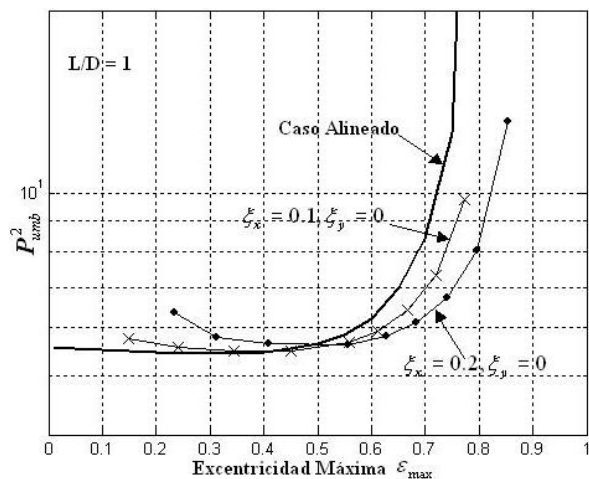


Figura 12 Velocidad umbral de estabilidad para sistemas rotor chumaceras desalineadas.

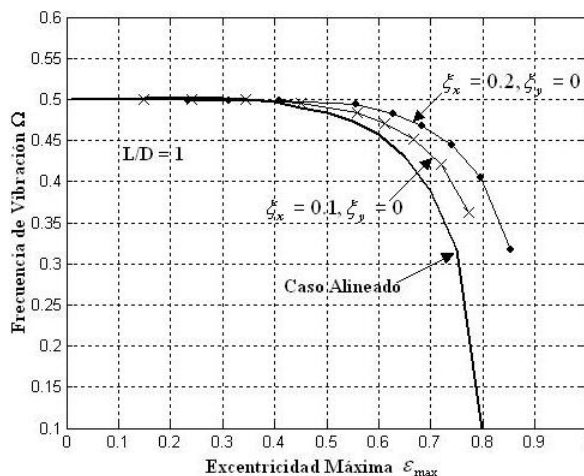


Figura 14. Frecuencia de vibración para un sistema rotor-chuceras de eje flexible con desalineamiento.

Agradecimientos:

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y tecnología CONACYT por el apoyo económico al otorgar la beca 128301 para realizar estudios de Doctorado en Ciencias en Ingeniería Mecánica en ESIME-IPN. Se agradece a la Universidad Tecnológica de la Mixteca UTM por la asignación de horas de investigación.

Conclusiones

En este trabajo se presenta un modelo de Jeffcott de eje flexible que considera que el muñón dentro de la chumacera se encuentra dentro de una posición desalineada. Para el caso de eje flexible sin desalineamiento se obtienen expresiones analíticas directas para el cálculo de la velocidad umbral y la frecuencia de vibración. Se observa que la frecuencia de vibración es independiente de la flexibilidad del eje y solo depende los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de la película de lubricante. Esta frecuencia es de naturaleza subsincrona y se presenta alrededor de 0.5 veces la frecuencia fundamental. También se obtiene que a medida que la flexibilidad del eje aumenta, la velocidad umbral de estabilidad disminuye. El modelo matemático de rotor flexible que utiliza 8 coeficientes rotodinámicos fue mejorado para incluir el desalineamiento del muñón en la chumacera que utiliza 32 coeficientes rotodinámicos. Con este modelo se determinó que la frecuencia de vibración no depende del desalineamiento (esta afirmación solo es válida para una configuración del rotor de Jeffcott que ignora la disimilitud del movimiento en las 2 chumaceras y la interacción de momentos giroscópicos con los hidrodinámicos) y solo depende de los valores de los coeficientes rotodinámicos y que ocurre alrededor de 0.5 veces la frecuencia fundamental. Por su parte, la velocidad umbral de estabilidad si se ve afectada por el desalineamiento del muñón y se obtuvo que para excentricidades abajo de 0.5 la velocidad umbral de estabilidad aumenta a medida que el desalineamiento aumenta y para valores de excentricidad mayores de 0.5 esta velocidad umbral de estabilidad disminuye a medida que el desalineamiento aumenta.

Referencias

- [1] Childs, D. (1993), "Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis," John Wiley and Sons, Inc. New York, USA.
- [2] Rao, J. S. (1991), "Rotor Dynamics", John Wiley and Sons, New Delhi.
- [3] Dimarogonas, A., (1996), "Vibration for Engineers", Prentice Hall, New York, USA
- [4] Vance, J. M., (1988), "Rotordynamics for turbomachinery", John Wiley and Sons, Inc. New York USA
- [5] Antonio-García, A. (2006), "Investigación Analítica y Numérica de las Propiedades Dinámicas de Chumaceras Hidrodinámicas Con y Sin Desalineamiento", Tesis de Doctorado, ESIME-IPN, México. D.F.

[6] Fisher A., (1922), "Oil Flow in Ring Lubricated Bearings Machinery," London, 22, 311

[7] Pigott R.J.S., (1942), "Bearing and Lubrication Bearing Troubles Traceable to Design can be Avoided by Engineering Study", *Mech. Engrs*, 64, 259

[8] Dubois, G. B., Mabie, H. H. and Ocvirk, F. W., (1951), "Experimental investigation of oil film pressure distributions for misaligned plain bearings," *N.A.C.A. Tech. note* 2507.

[9] Smalley, A.J., and McCallion, H., "The effect of journal misalignment on the performance of a journal bearing under steady running conditions", *Proc. Inst. Mech. Eng.* 1966-1977, Vol. 181(part 313), p. 45.

[10] Antonio-García, A., (2001), "Identificación de parámetros de sistemas dinámicos, Aplicación a un problema rotodinámico.", *Tesis de maestría* realizada en SEPI-ESIME-IPN, México. D.F.

[11] Vogelpolh, G., (1937), "Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung," *V.D.I Forsch.* (No. 386), 28 pp

[12] Gómez-mancilla, V. Nossov, (2001), "Short Journal Bearings with Misaligned Axes", *International Symposium on Stability, Control of Rotating Machinery*, ISCORMA-1, Lake Tahoe, Nevada, USA.

[13] Gómez-Mancilla, V. Nossov, (2002), "Perturbed Pressure Field Solution for Misaligned Short Journal Bearings", *9th International Symposium On Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, ISCORMA-9, Honolulu, USA.

[14] Gomez-Mancilla, V. R. Nossov, R. Arias, (2002), "Lubricant Pressure Field and Minimum Film Clearance of Misaligned Short Journal Bearing" *ASME/STLE International Joint Tribology Conference*, Cancún , México.

[15] A. Antonio-García, J. Gómez-Mancilla, V. Nossov, "Stability Threshold Speed Calculations for Rigid and Flexible Jeffcott Rotors," in *Proc. 3er Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas* (ICESE '02), IPN, México, DF, November 2002.

[16] J. Gómez-Mancilla, Valery R. Nossov, Silva-Navarro, "Rotor Bearing System Stability Performance Comparing Hybrid vs Conventional Bearings," *International Journal of Rotating Machinery*, Vol. 2005, No. 1, pp 16-22.

[17] Gómez-Mancilla, V.R. Nossov, I. Ramirez-Vargas, "Analytical Rotordynamic Coefficients and Stability Analysis for Short Hybrid Journal Bearing", *Enviado a ASME Trans Journal of Tribology*, 2006.

[18] R. López-Ruiz, J. Gómez-Mancilla, (2005) "Estudio Experimental de la Contribución del Desalineamiento en la Estabilidad de Sistemas Rotor-Chumaceras", *4to Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, Noviembre 2005.

Tabla 1 Coeficientes rotodinámicos para $\epsilon_0 = 0.25y$
 $L/D=0.75$, $\xi_x = 0.1$ y $\xi_y = 0$.

| | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--|--|
| $\tilde{k}_{F_x x} = 2.230$ 5 | $\tilde{k}_{F_x y} = -$ 3.4949 | $\tilde{k}_{F_x \alpha_x} = -$ 0.014793 | $\tilde{k}_{F_x \alpha_y} = 0.0$ 16774 |
| $\tilde{k}_{F_y x} = 4.666$ 6 | $\tilde{k}_{F_y y} = 1.422$ 7 | $\tilde{k}_{F_y \alpha_x} = 0.06$ 3141 | $\tilde{k}_{F_y \alpha_y} = 0.0$ 86057 |
| $\tilde{k}_{M_x x} = 0.066$ 95 | $\tilde{k}_{M_x y} = 0.03$ 6928 | $\tilde{k}_{M_x \alpha_x} = 0.13$ 549 | $\tilde{k}_{M_x \alpha_y} = 0.$ 2006 |
| $\tilde{k}_{M_y x} = -$ 0.0026031 | $\tilde{k}_{M_y y} = -$ 0.0062206 | $\tilde{k}_{M_y \alpha_x} = 0.15$ 967 | $\tilde{k}_{M_y \alpha_y} = -$ 0.15004 |
| $\tilde{c}_{F_x x} = 7.589$ 8 | $\tilde{c}_{F_x y} = 2.200$ 3 | $\tilde{c}_{F_x \alpha_x} = 0.06$ 6771 | $\tilde{c}_{F_x \alpha_y} = -$ 0.089299 |
| $\tilde{c}_{F_y x} = 2.200$ | $\tilde{c}_{F_y y} = 8.988$ 9 | $\tilde{c}_{F_y \alpha_x} = 0.337$ 92 | $\tilde{c}_{F_y \alpha_y} = 0.0$ 21588 |
| $\tilde{c}_{M_x x} = 0.033$ 617 | $\tilde{c}_{M_x y} = 0.166$ 27 | $\tilde{c}_{M_x \alpha_x} = 0.36$ 106 | $\tilde{c}_{M_x \alpha_y} = 0.$ 10801 |
| $\tilde{c}_{M_y x} = 0.044$ 192 | $\tilde{c}_{M_y y} = -$ 0.0075359 | $\tilde{c}_{M_y \alpha_x} = -$ 0.10851 | $\tilde{c}_{M_y \alpha_y} = -$ 0.36672 |